QA
36
.E56
v.3B
pt.10

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SECHS BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . .	H. BURKHARDT† (1896–1914), W. WIRTINGER (1905–1912) IN WIEN, R. FRICKE IN BRAUNSCHWEIG UND E. HILB IN WÜRZBURG.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . .	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN DARMSTADT.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN.	F. KLEIN† (1896–1925) UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK	PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT† (1899–1905) IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE, IN 2 TEILBÄNDEN	K. SCHWARZSCHILD† (1904–1916) UND S. OPPENHEIM† (1919–1928).

BAND III 2. HEFT 10.

W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG IN PR., III C 10a: SPEZIELLE ALGEBRAISCHE FLÄCHEN: FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG . . . . . S. 1437

AUSGEGEBEN AM 20. DEZEMBER 1928.

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1928

Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II (vollständig); Bd. III 1 1 (vollständig); Bd. III 1 II, Heft 5–9; Bd. III 2 1 (vollständig); Bd. III 2 II, Heft 7–10; Bd. III 3 (vollständig); Bd. IV 1 1 (vollständig); Bd. IV 1 II, Heft 1–3; Bd. IV 2 1 (vollständig); Bd. IV 2 II (vollständig); Bd. V (vollständig); Bd. VI 1 A (vollständig); Bd. VI 1 B (vollständig); Bd. VI 2 A (vollständig); Bd. VI 2 B, Heft 1–2.

Jeder Band ist einzeln käuflich, dagegen werden einzelne Hefte nicht abgegeben. Der Bezug der ersten Lieferung eines Bandes verpflichtet zu seiner vollständigen Abnahme.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 6 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck - München, O. Hölder - Leipzig, M. Planck - Berlin, W. Wirtinger - Wien,

steht der Redaktion, die aus den Herren

R. Fricke - Braunschweig, Ph. Furtwängler - Wien, E. Hilb - Würzburg, W. Fr. Meyer - Königsberg, H. Mohrmann - Darmstadt, C. H. Müller - Hannover, A. Sommerfeld - München

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens (†)
P. Bachmann (†)
J. Bauschinger - Leipzig
G. Bohlmann - Berlin
L. v. Bortkewitsch - Berlin
H. Burkhardt (†)
E. Czuber (†)
W. v. Dyck - München
D. Hilbert - Göttingen
O. Hölder - Leipzig
G. Landsberg (†)
R. Mehmke - Stuttgart
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.
E. Netto (†)
V. Pareto - Lausanne
A. Pringsheim - München
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
H. Schubert (†)
D. Seliwanoff - Prag
E. Study - Bonn
K. Th. Vahlen - Greifswald
H. Weber (†)
A. Wiman - Upsala

II. Band:

L. Bieberbach - Berlin
M. Böcher (†)
H. A. Bohr - Kopenhagen
E. Borel - Paris
G. Brunel (†)
H. Burkhardt (†)
H. Cramér - Stockholm
G. Faber - München
M. Fréchet - Poitiers
R. Fricke - Braunschweig
H. Hahn - Wien
J. Harkness - Montreal
E. Hellinger - Frankfurt a. M.
K. Hensel - Marburg
E. Hilb - Würzburg
H. W. E. Jung - Halle
A. Kneser - Breslau
A. Krazer (†)
L. Lichtenstein - Leipzig
L. Maurer (†)
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.
P. Montel - Paris
N. E. Nörlund - Kopenhagen
W. F. Osgood - Cambridge,
P. Painlevé - Paris [Mass.
S. Pincherle - Bologna
A. Pringsheim - München
M. Riesz - Lund
A. Rosenthal - Heidelberg
C. Runge (†)
A. Sommerfeld - München
O. Szász - Frankfurt a. M.
O. Toeplitz - Bonn
E. Vessiot - Paris
A. Voss - München
A. Wangerin - Halle
E. v. Weber - Würzburg
Fr. A. Willers - Charlottenburg
W. Wirtinger - Wien
E. Zermelo - Freiburg
L. Zoretti - Caen

III. Band:

G. Berkhan (†)
L. Berwald - Prag
L. Berzolari - Pavia
Chr. Betsch - Cannstatt
G. Castelnuovo - Rom
M. Dehn - Frankfurt a. M.
F. Dingeldey - Darmstadt
F. Enriques - Rom
G. Fano - Turin
P. Heegaard - Oslo
G. Kohn (†)
H. Liebmann - Heidelberg
R. v. Lilienthal - Münster i. W.
G. Loria - Genua
A. Lotze - Stuttgart
H. v. Mangoldt (†)
W. Fr. Meyer - Königsberg i. P.
E. Müller (†)
E. Papperitz - Freiberg i. S.
K. Rohn (†)
H. Rothe (†) [burg
E. Salkowski - Charlotten-
G. Scheffers - Charlottenburg
A. Schoenflies - Frankfurt
C. Segre (†) [a. M.
J. Sommer - Danzig
P. Stäckel (†)
O. Staude (†)
E. Steinitz - Kiel
H. Tietze - München
L. Vietoris - Innsbruck
A. Voss - München
R. Weitzenboeck - Amsterdam
M. Zacharias - Berlin
H. G. Zeuthen (†)
K. Zindler - Innsbruck

IV. Band:

M. Abraham (†)
P. Cranz - Berlin
C. u. T. Ehrenfest - Leiden
S. Finsterwalder - München
O. Fischer (†)
L. Föppl - München
Ph. Forchheimer - Wien
Ph. Furtwängler - Wien
M. Grübler - Dresden
M. Grüning - Hannover
E. Hellinger - Frankfurt a. M.
L. Henneberg - Darmstadt
K. Heun - Karlsruhe
G. Jung - Mailand
Th. v. Kármán - Aachen
F. Klein (†)
A. Krilloff - Petersburg
H. Lamb - Manchester
A. E. H. Love - Oxford
R. v. Mises - Berlin
C. H. Müller - Hannover
L. Prandtl - Göttingen
G. Prange - Hannover
H. Reißner - Charlottenburg
A. Schoenflies (†)
P. Stäckel (†)
O. Tedone - Genua
H. E. Timerding - Braunschwg.
A. Timpe - Berlin
A. Voss - München
G. T. Walker - Simla (Indien)
K. Wieghardt (†)
G. Zemplén (†)

V. Band:

M. Abraham (†)
L. Boltzmann (†)
M. Born - Göttingen
G. H. Bryan - Bangor (Wales)
P. Debye - Leipzig
H. Dießelhorst - Braunschwg.
P. S. Epstein - Pasadena
R. Gans - Königsberg
K. F. Herzfeld - München
F. W. Hinrichsen (†)
E. W. Hobson - Cambridge
H. Kamerlingh-Onnes - Leiden
W. H. Keesom - Leiden
Kratzer - Münster i. W.
M. v. Laue - Berlin
Th. Liebisch (†)
H. A. Lorentz (†)
L. Mamlock - Berlin
H. Minkowski (†)
O. Mügge - Göttingen
J. Nabl - Wien
W. Pauli - Hamburg
F. Pockels (†)
L. Prandtl - Göttingen
R. Reiff (†)
C. Runge (†)
A. Schoenflies (†)
M. Schröter (†)
R. Seeliger - Greifswald
A. Smekal - Halle
A. Sommerfeld - München
E. Study - Bonn
A. Wangerin - Halle
W. Wien (†)
J. Zenneck - München

VI, 1. Band:

R. Bourgeois - Paris
V. Conrad - Wien
G. H. Darwin (†)
F. Exner - Wien
S. Finsterwalder - München
Ph. Furtwängler - Wien
F. R. Helmert (†)
S. Hough - Kapstadt
H. Meldau - Bremen
W. Moebius - Leipzig
P. Pizzetti - Pisa
C. Reinhertz (†)
A. Schmidt - Potsdam
E. v. Schweidler - Innsbruck
W. Trabert (†)

VI, 2. Band:

E. Anding - Gotha
J. Bauschinger - Leipzig
A. Bemporad - Catania
E. W. Brown - New-Haven
C. Ed. Caspari - Paris
F. Cohn - Berlin
R. Emden - München
F. K. Ginzel - Berlin
P. Guthnick - Neu-Babelsberg
F. Hayn - Leipzig
J. v. Hepperger - Wien
G. Herglotz - Göttingen
K. Hoffmeister - Sonneberg
J. Holetschek - Wien
H. Kienle - Göttingen
H. Kobold - Kiel
F. Kottler - Wien
K. Laves - Chicago
G. v. Niessl - Wien
S. Oppenheim - Wien (†)
K. Samter - Berlin
K. Schwarzschild (†)
K. Sundman - Helsingfors
E. T. Whittaker - Edinburgh
A. Wilkens - Breslau
C. W. Wirtz - Kiel
H. v. Zeipel - Upsala

Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Unter der Abteilung Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften nimmt die Redaktion des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ihr aus dem Leserkreise zugehende Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen (auch in literarischer Hinsicht) zu den erschienenen Heften der Encyklopädie auf. Diesbezügliche Einsendungen sind an den Herausgeber des Jahresberichts Herrn Prof. Dr. L. Bieberbach, Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16, zu richten, der sich mit den betr Bandredakteuren wegen der Veröffentlichung der Notizen in Verbindung setzen wird.

Die akademische Kommission zur Herausgabe der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

COPYRIGHT 1928 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

III C 10. SPEZIELLE ALGEBRAISCHE FLÄCHEN.

III C 10a. FLÄCHEN DRITTER ORDNUNG.

Von

W. FR. MEYER

IN KÖNIGSBERG I. PR.

Inhaltsübersicht.

I. Historische Entwicklung der Haupteigenschaften der Fläche.

1. Erstes Auftreten der allgemeinen F_3 bei *Plücker* und *Magnus*.
2. Erste Grundlegung der Theorie. Die Bestimmung der 27 Geraden und 45 Ebenen nach *Salmon* und *Cayley*.
3. *Sylvesters* Pentaeder und *Steiners* Kernfläche.
4. Singularitäten. Klasse der Fläche. Einteilung in Arten nach *Schläfli* und *Cayley*.
5. Fortsetzung. Einfluß der Singularitäten auf die 27 Geraden und 45 Ebenen.
6. Realitätsverhältnisse bei den 27 Geraden und 45 Ebenen. Die fünf *Schläfli*schen Typen singularitätenfreier Flächen.
7. *Graßmanns* Erzeugungen der Fläche.
8. *Steiners* Erzeugungen der Fläche. Konjugierte Trieder.
9. Weitere Erzeugungen der Fläche nach *August, Sturm, Schroeter* u. a. Konjugierte Tetraeder.
10. *Schläflis* Diskussion der 27 Geraden und 45 Ebenen. Sechsen und Doppelsechsen. Fünfen.
11. *Clebschs* Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Geometrie auf der Fläche. Schiefe Projektion. Sekantenprojektion und Sekantenabbildung.
12. Formentheoretische Behandlung der Fläche. Übertragungsprinzipien.
13. Reziprokalfläche. Die *Steiner*sche Fläche S als Reziproke einer F_3 mit vier Knoten und ihre Abbildung auf die Ebene. Der *Lie*sche Satz. Der *Picard*sche Satz.
14. Regelflächen 3. Ordnung und ihre Abbildung. Die *Cayley*sche Grenzfläche und der *Lie*sche Satz.

II. Systematischer Ausbau der Theorie.

15. *Cremonas* und *Sturms* Preisarbeiten. Kurven auf der Fläche.
16. *Geisers* Projektion der Fläche von einem ihrer Punkte aus. *Segres* Projektion vom S_4 aus; die F_3 als ausgeartete F_4 mit Doppelkegelschnitt.
17. Gestaltliche Verhältnisse der Fläche. Modelle. *F. Kleins* Auflösung von Knotenpunkten. *Juels* topologische Flächen 3. Ordnung.

18. Zusammenhang zwischen den 27 Geraden und dem Pentaeder nach *Cremona* und *Beltrami.*
19. Fortsetzung. Binäre Beziehungen der Fläche auf kubische Raumkurven nach *W. Fr. Meyer.* Ergänzungen von *Waelsch.*
20. Das Gebüsch der ersten Polaren der Fläche.
21. Lineare Konstruktionen der Fläche. Allgemeinere Gesichtspunkte bei *v. Escherich.*
22. Gruppentheoretische Behandlung der Fläche nach *Klein* und *Burkhardt,* sowie von *Coble.*
23. Spezielle Flächen 3. Ordnung.
24. Fortsetzung. Das Zylindroid.

Literatur.

Monographien und Lehrbücher.

L. Cremona, Mémoire de géometrie pure pour les surfaces du troisième ordre (Berliner Preisschrift), J. f. Math. 68 (1867), p. 1—133 („*Cremona*").
R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung (Berliner Preisschrift), Leipzig 1867 („*Sturm*").
F. Dumont, Théorie élementaire des surfaces du troisième ordre. Anecy 1893.
A. Henderson, The twenty-seven lines upon the cubic surface. Cambridge tracts Nr. 13, 1911.

Ferner die einschlägigen Abschnitte in den Lehrbüchern:

L. Cremona, Preliminari di una teoria generale dei superficie, Roma 1868; oder: Allgemeine Theorie der Oberflächen, deutsch von *M. Curtze,* Berlin 1870. Das Original erschien in erweiterter Ausgabe von *B. Guccia,* Geometria superiore, Palermo 1890.
G. Salmon-W. Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Teil 1865, 3. Aufl. Leipzig 1880 („*Salmon-Fiedler*").

[Die erste zusammenhängende Darstellung der Theorie erschien im Originalwerk:

G. Salmon, Analytic Geometry of three dimensions, Dublin 1862 (4. ed. 1882, 5. ed. by R. A. P. Rogers 1915); in französischer Ausgabe par *O. Chemin,* Paris 1892. Als eine Fortführung des *Salmon*schen Werkes ist anzusehen: *A. B. Basset,* Geometry of surfaces, Cambridge 1910 („*Basset*").]

Th. Reye, Geometrie der Lage, 2. Abt. 1868; 3. Aufl., 3. Abt. Leipzig 1892; 4. Aufl., 3. Abt. Leipzig 1910 („*Reye*").
C. M. Jessop, Quartic surfaces, Cambridge 1916.
H. E. Timerding, Repertorium der Mathematik II, 2: Kap. 34 „F_3" („*L. Berzolari*"); Kap. 35 „Besondere F_4" („*Timerding*").
H. F. Baker, Principles of geometry, Cambridge III (1923): F_3, F_4 u. a.; IV (1925): Ausdehnungen auf den S_n.

Einzelne historische Notizen findet man bei:

S. J. Korteweg, Amsterdam Néerl. Arch. 20 (1892), p. 63;
E. Kötter, Entwickelung der synthetischen Geometrie, Deutsche Math.-Ver. 5 (1901) („*Kötter*").

Verwandte Artikel der Encyklopädie sind an geeigneten Stellen angeführt.

Bezeichnungen.

Mit S_n werde der lineare n-fach ausgedehnte Raum bezeichnet, mit E die Ebene. F_n bedeute sowohl die Fläche n^{ter} Ordnung, wie die zugehörige quaternäre Form; C_n eine Raumkurve n^{ter} Ordnung, c_n eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung nebst ihrer ternären Form — im besonderen R_n, r_n die rationalen Kurven —; die dualistischen Gebilde werden durch griechische Buchstaben angegeben. Unter d_ν sei ein vielfacher Punkt ν^{ter} Ordnung in der Ebene wie im Raume verstanden, unter t_2 eine Doppeltangente einer c_n. Endlich bedeute f_n eine binäre Form n^{ter} Ordnung (n^{ten} Grades).

Eine Regelfläche 3. Ordnung trage das Zeichen $R\,F_3$.

Punktkoordinaten werden, wie üblich, mit x bezeichnet, die kontragredienten (dualistischen) mit u, Linienkoordinaten im Raume mit p.

I. Historische Entwicklung der Haupteigenschaften der Fläche.

1. Erstes Auftreten der allgemeinen F_3 bei Plücker und Magnus. Die allgemeine F_3 tritt wohl zuerst bei *J. Plücker*[1]) auf, der nach der (endlichen) Anzahl von Punkten P einer F_3 fragt, in denen sie mit einer eigentlichen F_2 einen Kontakt möglichst hoher, nämlich der dritten Ordnung aufweist.

Ein solcher Punkt P ist dadurch charakterisiert, daß in ihm die Schnittkurve C_6 der F_3 und F_2 einen d_4 besitzt.

Das ist nur so möglich (s. auch Nr. **11**), daß die C_6 zerfällt in ein Paar von Geraden und eine C_4 mit d_2 in P; zugleich existiert dann zu jedem solchen Punkt P noch ein ganzes Büschel von F_2 mit der angegebenen Kontakteigenschaft. Umgekehrt ergibt sich so, daß auf der F_3 eine endliche Anzahl von Geraden g liegt, derart, daß stets in dem Schnittpunkte zweier sich treffender g die F_3 mit einer F_2 einen Kontakt 3. Ordnung hat.

Weiter führt eine von *L. J. Magnus*[2]) aufgeworfene Frage. Zwei

---

1) *J. Plücker,* J. f. Math. 4 (1829), p. 349 = Ges. Abhandl. 1, herausgeg. von *A. Schoenflies,* Leipzig 1895, bes. p. 115. Vgl. den Ansatz bei *Clebsch,* Note 8. Die analytischen Bedingungen für den Kontakt einer F_2 mit einer F_n entwickelt *Ch. Hermite,* Cours d'analyse, Paris 1873, p. 148, die dann durch *H. Maschke* vereinfacht werden, Amer. Math. Soc. Bull. 3 (1902), p. 482.

Anderseits hat man den Kontakt einer C_2 mit einer F_n untersucht, so *A. Transon,* Nouv. Ann. (2) 9 (1870), p. 193, und ausführlich *G. Darboux,* Bull. math. astr. (2) 4 (1880), p. 348. Letzterer gelangt so im besonderen zu den Paaren inzidenter g auf der F_3 (s. Nr. **2**) als C_2 mit Maximalkontakt.

2) *L. J. Magnus,* Sammlung von Aufgaben . . ., Berlin 1837, § 84. (S. auch „*Kötter*", p. 347 ff.) Vgl. *Cremona* (Schluß von Nr. **11**), sowie auch *O. Hesse,* J. f. Math. 49 (1855), p. 243, 279. Die Ideen von *Magnus* haben weiter entwickelt: *F. Geiser,* J. f. Math. 69 (1868), p. 197; *A. Cayley,* London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 127, der besonders den Fall von drei symmetrischen bilinearen Gleichungen

lineare Punkträume $S_3(x)$ und $S_3'(y)$ seien dadurch eineindeutig aufeinander bezogen, daß zwischen den Koordinaten (x) und (y) zweier entsprechender Punkte $P(x)$ und $P'(y)$ drei beliebige bilineare Relationen bestehen. Denkt man sich die letzteren etwa nach den y aufgelöst, so werden die y proportional den (mit alternierenden Vorzeichen genommenen) Determinanten $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ einer Matrix $|\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \delta_r|$ $(r = 1, 2, 3)$, deren Elemente beliebige Linearformen der x sind. Irgendeiner Ebene $\mathsf{E}'(y)$ korrespondiert somit eine $F_3(x)$ [und vice versa einer Ebene $\mathsf{E}(x)$ eine $F_3'(y)$].

Verschwinden irgend zwei der vier Determinanten, etwa A und B, so auch die beiden anderen, Γ und Δ, mit Ausnahme der Punkte (x), für die die drei zweireihigen Determinanten der Matrix $|\gamma, \delta|$ zugleich verschwinden, also mit Ausnahme der Punkte einer $C_6(x)$. Da sich irgend zwei $F_3(x)$ in einer $C_9(x)$ schneiden, so folgt hier im besonderen, daß die der ∞^3-linearen Gesamtheit (Gebüsch) der Ebenen $\mathsf{E}'(y)$ entsprechende Gesamtheit (Gebüsch) der $F_3(x)$ eine feste „Fundamentalkurve“ $C_6(x)$ gemein hat, und vice versa. Soweit *Magnus.*

Verfolgt man indessen seinen Gedankengang etwas weiter, so erkennt man, wie nahe er bereits der *Clebsch*schen Abbildung einer F_3 auf eine Ebene (s. Nr. **11**) und damit einer systematischen Theorie der F_3 war. Den Geraden je des einen Raumes entsprechen C_3 des andern. Den ∞^2 Geraden $g'(y)$ einer festgehaltenen Ebene $\mathsf{E}'(y)$ entsprechen ∞^2 $C_3(x)$, so daß sich irgend zwei derselben, $C_3^{(1)}$ und $C_3^{(2)}$ — abgesehen von je acht mit der C_6 gemeinsamen Punkten — noch in einem Restpunkte $P(x)$ begegnen, dem Bilde des Schnittpunktes $P'(y)$ der beiden entsprechenden Geraden g_1' und g_2'.

Umgekehrt frage man nach den Bildern der ebenen Schnitte $C_3(x)$ der festgedachten Fläche $F_3(x)$ in der festen Ebene $\mathsf{E}'(y)$.

Da dem Gebüsch der Ebenen $\mathsf{E}(x)$ ein Gebüsch von $F_3'(y)$ mit fester Fundamentalkurve $C_6'(y)$ entspricht, die die Ebene $\mathsf{E}'(y)$ in sechs festen „Fundamentalpunkten“ A_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ trifft, so korrespondiert der Gesamtheit der ebenen Schnitte $C_3(x)$ das Gebüsch der ebenen $c_3'(y)$, die durch die sechs Punkte A_i gehen.

Insbesondere lassen sich hieraus (s. Nr. **11**) die Fälle ablesen, wo eine der $c_3'(y)$, und damit zugleich der ebene Schnitt $C_3(x)$ auf der

---

verfolgt, so daß die Transformation (x, y) zu einer Involution wird; *W. Fiedler,* Zürich. Vierteljahrsschr. 21 (1876), p. 369. Eine fruchtbare Anwendung der *Cayley*schen Involution auf die Erzeugung der 23 Arten der F_3 (s. Nr. **4**) machte *F. Pobanz,* Calif. Univ. Publ. 1 (1924), p. 481. — Auf den S_4 wird die Involution ausgedehnt von *P. H. Schoute,* Arch. Teyler (2) 7 (1900), p. 117 und *N. Alderton,* Calif. Univ. Publ. 1 (1923), p. 345.

$F_3(x)$, in einen Kegelschnitt und eine Gerade, oder noch spezieller in drei Gerade zerfällt. Man gelangt so direkt zu einer Theorie der endlichen Anzahl von Geraden g auf der F_3, und ihren gegenseitigen Lagen.

2. Erste Grundlegung der Theorie. Die Bestimmung der 27 Geraden und 45 Ebenen nach Salmon und Cayley. Um die Mitte des vorigen Jahrhunderts legten die in regem Verkehr miteinander stehenden englischen Geometer *A. Cayley, G. Salmon* und *J. J. Sylvester* den Grund zu einer Theorie der F_3. Und zwar ergeben sich gleich zwei Haupteigenschaften, die Existenz der 27 Geraden[2a]) und 45 Ebenen, sowie die des Pentaeders der F_3 (Nr. **3**).

Da auf einer F_3 eine (im allgemeinen) endliche[3]) Anzahl von

---

2a) Das nächste Analogon zu den 27 g einer F_3 im S_4 bietet die F_5, auf der wiederum eine endliche Anzahl von g liegen muß. Deren Anzahl bestimmt *H. Schubert* als 2875, Kalkül der abzählenden Geom., Leipzig 1879. Durch eine eingehende Revision mit Ergänzungen bestätigt dies Ergebnis *D. V. Steed,* Calif. Univ. Publ. 1 (1924), p. 425, und behandelt auch weitere verwandte Aufgaben.

3) *Salmon* bei *Cayley,* Cambridge Dublin J. 4 (1849), p. 118 = *Cayley,* Coll. Math. Papers, Cambridge 1, p. 445, am Ende, p. 456. Die Schlußweise, die die Endlichkeit der Anzahl der Geraden g begründen soll, ist folgende. Eine beliebige Gerade trifft die F_3 in drei Punkten, die von einer kubischen Gleichung (in einem Parameter) abhängen. Die Gerade liegt dann und nur dann auf der F_3, wenn die vier Koeffizienten jener Gleichung zugleich verschwinden. Damit ergeben sich vier Bestimmungsgleichungen für die vier unabhängigen Koordinaten der Geraden, die im allgemeinen eine endliche Anzahl von Lösungen haben werden. Diese für die Behandlung derartiger Endlichkeitssätze damals übliche Schlußweise („Prinzip des Konstantenzählens"), die namentlich *Plücker* bevorzugte (vgl. *F. Klein,* Autogr. Vorl. über höhere Geometrie 1, Göttingen 1893), bedarf indessen gewisser Ergänzungen, wie zuerst *A. Clebsch,* Gött. Abh. 16 (1871), bes. p. 23, betonte. Es ist im einzelnen Falle zu zeigen, daß die vorgelegten n Bestimmungsgleichungen in n Unbekannten einerseits miteinander verträglich, andererseits voneinander unabhängig sind; wenn nicht, so würde im ersteren Falle gar keine Lösung existieren, im letzteren Falle dagegen eine Schar von unendlich vielen Lösungen. Aber selbst dann, wenn jene beiden Bedingungen (wie zumeist) erfüllt sind, kann sich noch ereignen, daß die der endlichen Lösungsanzahl entsprechenden geometrischen Gebilde irgendwie ausgeartet sind, und damit der Aufgabe, die solche Ausartungen ausdrücklich oder stillschweigend ausschließt, fremd sind. Im Falle des Textes, wo es sich um gesuchte Gerade handelt, ist eine Ausartung (in projektivem Sinne) ausgeschlossen. Die Verträglichkeit der vier Gleichungen wird an Spezialfällen (z. B. der F_3 mit vier Knotenpunkten, s. Nr. **13**) erkannt. Wären endlich die vier Gleichungen abhängig voneinander, so würde jede F_3 eine Regelfläche sein, was offenbar nicht zutrifft. Das obige Prinzip des Konstantenzählens hat *Plücker* insbesondere dann angewendet, wenn die Gleichung einer algebraischen Kurve oder Fläche auf eine gewisse kanonische Gestalt gebracht werden soll, deren Konstantenanzahl mit der der vorgelegten Gleichung übereinstimmt. Vgl. noch *E. Lasker,* Math. Ann. 58 (1904), p. 434, der ein Kriterium von *L. Kronecker* zugrunde legt wonach die

Geraden liegen wird, so gehe man mit *Salmon*[3]) von *einer* solchen (reell angenommenen) Geraden g ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$) aus, so daß die Gleichung[4]) der F_3 die Gestalt $x_2 U = x_3 V$ erhält. Das Ebenenbüschel $x_4 = \lambda x_3$ schneidet noch lauter C_2 aus der F_3 aus, die sich durch eine quadratische Gleichung in den x_1, x_2, x_3 bestimmen. Eine solche C_2 kann nur dann in ein Geradenpaar ausarten, wenn die Koeffizientendeterminante $D(\lambda) = D$ der Gleichung verschwindet.

Nun ist in dieser dreireihigen Determinante D *ein* Element vom dritten Grade in λ, die Elemente seines Minors linear, endlich die vier Restelemente quadratisch in λ.

Da sich somit D als vom fünften Grade in λ erweist, so wird g, also auch jede Gerade der F_3, von zehn andern solchen Geraden getroffen. Eine Ebene T, in der drei Gerade der F_3 liegen, wird von jeder weiteren Geraden der F_3 einmal getroffen, worauf sofort die Existenz der „27 Geraden“ g der F_3 fließt, die sich auf 45 der fraglichen Ebenen T verteilen.

Diese Ebenen T sind dieselben, die die F_3 dreimal berühren („Tritangentialebenen“).

Hierauf gestützt, kann man auch die quadratischen Formen U, V als zerfallende annehmen, so daß die Gleichung der F_3, und zwar auf 120 Weisen, in die Gestalt $x_1 x_2 x_3 = y_1 y_2 y_3$ gebracht werden kann, die eine leichtere Übersicht und Bezeichnung der 27 Geraden und 45 Ebenen ermöglicht (Nrn. 8, **11**).

Das Tripel der Ebenen x schneidet sich mit dem Tripel der Ebenen y in neun Geraden, aus denen sich sechs je windschiefe Tripel bilden lassen, deren jedes ein Hyperboloid bestimmt[5]); dieses schneidet

---

Funktionaldeterminante der Bedingungsgleichungen von Null verschieden sein muß. — Von *Cayley* (l. c.) rührt auch der Satz her, daß die, durch irgendeine der drei in einer T liegenden g vier weiteren an die F_3 gehenden T das nämliche Doppelverhältnis besitzen, vgl. auch *G. Kohn*, Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 343. Der Satz läßt sich nach *K. Bobek*, Wien Ber. 100 (1894), p. 887; Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 145 dahin erweitern, daß die fünf, durch irgendeine der g an die F_3 gehenden T dieselben (zwei) absoluten Invarianten haben. S. Nr. **12**.

4) Diese Gestalt $x_3 U = x_4 V$ ist gleichwertig mit der *Steiner*schen Erzeugung der F_3 durch ein Ebenenbüschel $x_4 = \lambda x_3$ und ein ihm projektiv zugeordnetes F_2-Büschel $U = \lambda V$ (s. Nr. 8).

5) Diese Bestimmungsweise läßt zwar theoretisch die Existenz der 27 Geraden hervortreten, ist aber praktisch weniger geeignet, wenn es sich um eine möglichst einfache Konstruktion der weiteren $27 - 9 = 18$ Geraden handelt. Denn die Bestimmung von je drei weiteren Geraden durch sechs Hyperboloide führt auf sechs kubische (irreduzible) Gleichungen, also auf sechs (gleichwertige) „Aufgaben 3. Grades“, und setzt überdies die Existenz der F_3 voraus. Man

seinerseits aus der F_3 drei weitere Gerade aus, und eben diese $6 \cdot 3 = 18$ weiteren Geraden ergänzen sich mit den ursprünglichen neun zu den 27 Geraden g. Auf Realitätsverhältnisse wird nicht weiter eingegangen. Bis soweit *Salmon*.

Cayley[3]) weist darauf hin, wie man auch ohne Kenntnis[3a]) einer

---

verfahre vielmehr so. Durch die vorgelegten neun Geraden geht noch ein Büschel von F_3: $x_1 x_2 x_3 = \mu y_1 y_2 y_3$. Der Parameter μ läßt sich so bestimmen, daß die F_3 noch eine zehnte, irgend drei windschiefe von den gegebenen treffende Gerade enthält, was linear ausführbar ist. Aus diesen zehn bekannten Geraden lassen sich zwei je windschiefe Quadrupel herausgreifen, deren Transversalenpaare — die der F_3 angehören müssen — durch Lösung je einer Aufgabe 2. Grades erhalten werden. So kann man fortfahren, bis man endlich zu allen $27\,g$ gelangt ist. Als Kontrolle dient zweckmäßig die *Clebsch*sche Abbildung der F_3 (s. Nr. **11**). Somit bedarf man auf diesem Wege nur quadratischer und linearer Konstruktionen. Nach anderer Richtung hin verfolgt die $27\,g$ konstruktiv *H. F. Baker,* London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1910), p. 145; insbesondere werden aus 7 gegebenen g die 20 übrigen linear konstruiert. — Legt man durch die Restberührungspunkte B_i der fünf, gemäß *Salmon* durch eine g an die F_3 gehenden T irgendeine C_3 mit vier Restschnittpunkten R_k, so berührt nach *F. Gonseth,* Eus. math. 18 (1916), p. 328 jede Ebene (g, R_k) die C_3 in R_k (Verallgemeinerung eines bekannten c_3-Satzes). — Der zu jedem Restkegelschnitt einer g gehörige Pol beschreibt nach *A. Brambilla,* Nap. Rend. (3) 2 (1896), p. 17; ebenda 3 (1897), p. 203, eine C_3, die durch die 5 d_2 der 5 mit g inzidenten g-Paare geht und die F_3 in den beiden Doppelpunkten der Involution auf g berührt; hiermit sind gewisse R_4 verknüpft. — Die $27\,g$ und $45\,\mathsf{T}$ bilden im S_3 eine Konfiguration $(27_5, 45_3)$, die von *L. Berzolari,* Rom Linc. Rend. (5) 25_2 (1916), p. 258, 367 genauer untersucht und zu einer Konfiguration (x_k, y_n) erweitert wird. Auch die Umkehrungsaufgabe wird behandelt und auf den S_r ausgedehnt, ebenda 26_1 (1917), p. 29, 102. *G. Kohn,* Wien Ber. 117 (1908), p. 53, studiert die entsprechende Konfiguration $(27_5, 45_3)$ als Spurgebilde der g und T auf irgendeiner ebenen Schnitt-c_3 und setzt sie in Beziehung zur Abbildung der F_3 (Nr. **11**) und zu den *Schur*schen F_2 (Note 11). Diese Konfiguration wird weiter verfolgt von *W. Burnside,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 15 (1909), p. 71, und *W. P. Milne,* London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1911), p. 617; ebenda 10 (1912), p. 446; bei letzterem steht das konstante Doppelverhältnis der vier, von einem Punkte der c_3 an sie gehenden Tangenten im Vordergrunde. — Über weitere Konfigurationen der $27\,g$ und $45\,\mathsf{T}$ s. Nrr. **11**, **22**.

3a) Man kann dann vermöge einer Reihe *Bézout*scher Eliminationsprozesse zu einer Endresultante 27. Grades in einer Unbekannten gelangen, deren Wurzeln den $27\,g$ entsprechen (vgl. auch Nr. **22**). — Es seien noch einige direkte geometrische Ableitungen der $27\,g$ erwähnt. *H. Picquet,* Soc. Math. Fr. B. 1 (1875), p. 260 gelangt auf mehrfache Weise zu den $27\,g$, indem er die endliche Anzahl von Trisekanten gewisser C_n im S_4 bestimmt, und dann geeignet projiziert. Bei *P. H. Schoute,* Amst. Versl. 19 (1910), p. 356, repräsentiert ein gewisses 27-top im S_6 die $27\,g$. Zwei weitere Ableitungen gibt *J. de Vries,* Arch. Néerl. (2) 6 (1901), p. 148, wo auch die Fälle von 1 bis 4 d_2 berücksichtigt werden. — Hieran mögen sich einige Hinweise auf F_n $(n > 3)$ mit einer endlichen Anzahl von g

Geraden g die Existenz der 27 Geraden der F_3 erschließen kann. Der von einem beliebigen Raumpunkte P an eine F_3 gehende Tangentialkegel[7]) ist von der Ordnung 6 und besitzt nach *Salmon*[6]) sechs Rückkehrkanten, aber keine Doppelkante, mithin nach einer der *„Plückerschen Formeln"*[7]) (s. Art. III C 4, *L. Berzolari,* Ebene algebrai-

---

schließen. F_4 und F_5 untersuchen *R. Sturm,* Math. Ann. 3 (1871), p. 249, und *J. de Vries,* Arch. Teyler (2) 8 (1902), p. 235; Amst. Versl. 10 (1902), p. 742 (besonders auch die Fälle mehrfacher g). Von bemerkenswerten F_4 seien erwähnt: Die F_4 mit Doppel-C_2 und 16 g, s. Nr. **16**; die *Kummer*sche F_4 mit 10 g (s. *„Timerding"*, p. 854 ff.), die nach dem Muster der 27 g *E. Pascal* studiert, Lomb. Ist. Rend. (2) 38 (1906), p. 688; eine (symmetrische) F_4 mit 48 g verfolgt *F. Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1; J. f. Math. 95 (1883), p. 207, sowie zwei weitere mit 52 resp. 64 g Math. Ann. 20 (1882), p. 84, vgl. auch *P. Veronese,* Math. Ann. 19 (1881), p. 161; die *Weddle*sche F_4 (s. *„Timerding"*, p. 852), der Ort der Spitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegel 2. Ordnung mit 25 g, bei *C. Hierholzer,* Math. Ann. 4 (1871), p. 173; das Symmetroid von *Cayley* mit 10 g, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198, und eine verwandte F_4, ebenfalls mit 10 g, bei *W. Fr. Meyer,* Apolarität und Rat. Kurven, Tübingen 1883, Abschn. 3. — Systematisch untersucht g auf F_n *G. Affolter,* Math. Ann. 27 (1886), p. 277; ebenda 29 (1887), p. 1, indem er sie je nach der Natur der Restkurven in zwei Gruppen teilt.

6) *Salmon,* Cambridge Dublin J. 2 (1847), bes. p. 66, wo allgemein F_n betrachtet werden.

7) Bedeuten n die Ordnung einer ebenen Kurve c, d die Anzahl der Doppel-, r die der Rückkehrpunkte, und dualistisch ν die Klasse, δ die Anzahl der Doppel-, ϱ die der Wendetangenten, so lauten die *Plücker*schen Formeln:

$$\begin{cases} \nu = n(n-1) - 2d - 3r, & \varrho = 3n(n-2) - 6d - 8r, \\ n = \nu(\nu-1) - 2\delta - 3\varrho, & r = 3\nu(\nu-2) - 6\delta - 8\varrho. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich für den *Cayley*schen Fall des Textes: $n = 6$, $d = 0$, $r = 6$, so daß $\nu = 12$, $\varrho = 24$, $\delta = 27$ wird, und das Geschlecht p aus der Geschlechtsformel:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \delta - \varrho, \text{ gleich } 4.$$

In dem besonderen Falle: $n = 4$, $d = 0$, $r = 0$ behalten ν und ϱ ihre Werte, während δ um Eins steigt, und p um Eins sinkt. Zu der Gleichung des *Cayley*schen Tangentialkegels gelangt man am kürzesten so. Wählt man die Spitze P des Kegels als eine Koordinatenecke A_4 ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$), so ordne man die Gleichung der F_3 nach Potenzen von x_4: $F_3 \equiv x_4^3 a_0 + 3x_4^2 a_1 + 3x_4 a_2 + a_3 \equiv g(x_4) = 0$. Ist dann D die Diskriminante der kubischen binären Form $g(x_4)$, so wird $D = 0$ die Gleichung des Kegels. Entwickelt hat man:

$$D \equiv f_2 f_4 - f_3^2 = (a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2.$$

Die sechs Rückkehrkanten sind die von P ausgehenden Haupttangenten der F_3, so daß die drei Wurzeln von $g(x_4)$ zusammenfallen, mithin f_2, f_3, f_4 zugleich verschwinden. Für die sechs Wertsysteme (x_1, x_2, x_3), für die f_2 und f_3 verschwinden, verschwindet von selbst auch (solange $a_0 \neq 0$) f_4.

Im Sonderfalle $a_0 = 0$ reduziert sich g auf $3x_4^2 a_1 + 3x_4 a_2 + a_3$, und die Diskriminante D auf $4a_1 a_3 - 3a_2^2$, s. auch Nr. **12**.

sche Kurven, Nr. **18**) 27 Doppelebenen, die aus der F_3 die 27 Geraden ausschneiden. *Cayley* stellt auch für eine geeignete Form der F_3-Gleichung die Gleichungen der 45 Ebenen in rationaler Gestalt auf und studiert den Schnitt der Figur mit einer Ebene (s. auch Nr. **11**).

Insbesondere empfiehlt es sich, mit *Geiser* (s. Nr. **16**) die Spitze P des Tangentialkegels auf der F_3 selbst anzunehmen. Die Ordnung des Kegels reduziert sich dann auf vier; er besitzt weder Rückkehr- noch Doppelkanten, dagegen 28 Doppelebenen, von denen eine die Tangentialebene der F_3 in P ist, während die 27 übrigen, wie oben, den 27 Geraden g_i entsprechen. Man ist so in der Lage, die bekannte Theorie der Doppeltangenten einer allgemeinen ebenen c_4 heranzuziehen.

Die Kurve der Punkte, in denen eine F_n mit einer Geraden eine vierpunktige Berührung hat, wird nach einer Abzählung *Salmons*[8]) von einer F_{11n-24} aus der F_n ausgeschnitten. Für $n = 3$ ergibt sich eine F_9, die die 27 Geraden ausschneidet, die in invarianter Form aufgestellt wird (s. auch Nr. **11**).

3. Sylvesters Pentaeder und Steiners Kernfläche. *Sylvester*[9]) stellte den Satz auf, daß eine (allgemeine) Form $F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$ stets und nur auf eine Weise als Aggregat von fünf Kuben von Linearformen z der x kanonisch darstellbar sei:

(1) $F_3 \equiv a_1 z_1^3 + a_2 z_2^3 + \cdots + a_5 z_5^3 \equiv \sum a z^3$ („*Pentaederform*“ von F_3),

wo die z an eine lineare Identität gebunden sind, die man in der Normalgestalt $\sum z \equiv 0$ annehmen darf. Die Ebenen $z = 0$ sind die des „*Pentaeders*“ der F_3.

Der geometrische Inhalt von (1) ergibt sich auf Grund des Polarenbegriffes.

---

8) *Salmon,* Cambridge Dublin J. 4 (1849), bes. p. 260 [vgl. dazu *L. Schläfli,* Quart. J. 2 (1858), p. 55]. Später, Quart. J. 1 (1857), bes. p. 335, vollzieht *Salmon* die erforderliche Elimination. In übersichtlicher, invarianter Gestalt teilt *Salmon* die Gleichung in London Trans. 150 (Juni 1860), bes. p. 238—239 mit, begnügt sich aber mit einem Hinweis auf eine Verifikation. Dagegen gibt *A. Clebsch,* J. f. Math. 58 (1861, dat. März 1860), bes. p. 102, eine volle Ableitung, die durch *P. Gordan,* Ztschr. Math. Phys. 12 (1867), p. 495 vereinfacht wurde. — Ferner geht durch die Doppelpunkte der Kurve vierpunktiger Berührung nach *Clebsch,* J. f. Math. 63 (1864), bes. p. 17, eine Schar von F_{3n-14}, also für $n = 3$, von F_{10} durch die Treffpunkte der 27 Geraden, von einfacher Gleichung. Beachtenswert ist, wie sich der Ansatz bei *Clebsch* inhaltlich mit dem bei *Plücker* (s. Note 1) deckt.

9) *Sylvester,* Cambridge Dublin J. 6 (1851), bes. p. 199—200. Der Darlegung des Textes gegenüber behaupten „*Salmon-Fiedler*“, p. 377, *P. Gordan,* Math. Ann. 5, p. 341, und *J. Lüroth,* ebenda 7, p. 17, übereinstimmend, daß *Sylvester* den Satz ohne Beweis mitgeteilt habe.

Die erste Polare eines Punktes (y) bzw. der F_3 ist eine F_2; soll dieselbe in einen Kegel ausarten, so erfüllen die Punkte (y) eine F_4: $\sum \frac{1}{az} = 0$, d. i. die von *J. Steiner* so genannte „*Kernfläche*“ der F_3, die auch der Ort der Spitzen (x) jener Kegel ist.[10])

Die Gleichung $\sum \frac{1}{az} = 0$ zeigt, daß die 10 Kanten des Pentaeders der F_4 angehören, und seine 10 Ecken Doppelpunkte der F_4 sind, deren erste Polaren bzgl. der F_3 je in ein Ebenenpaar zerfallen.

Sylvester hebt ferner hervor, daß die kanonische Form (1) die richtige Anzahl[11]) von Konstanten mit sich führe und fährt fort: Außer den Ecken des Pentaeders gebe es, bei allgemeiner F_3, ersichtlich keinen Punkt, dessen Polare bzgl. der F_3 in ein Ebenenpaar zerfalle; mithin existiere ein und nur ein Pentaeder. Somit finden sich im wesentlichen alle Momente einer Verifikation bei *S.*

---

10) Die Punkte (y) und (x) heißen *reziproke Pole* der F_3. Für eine F_n treten die Örter beider Punkte („*konjugierter Pole*“) als *Hesse*sche und *Steiner*sche *Fläche* (oder *Kernfläche* und *konjugierte Kernfläche*) auseinander. — Die Kernfläche einer F_n wird untersucht von „*Cremona*“, *H. Schubert,* Ztschr. Math. Phys. 15 (1870), p. 126; *A. Voss,* Math. Ann. 27 (1886), p. 27, 277. Der $H(F_3)$ ist eine Reihe von Spezialuntersuchungen gewidmet. Das Verhalten der $H(F_3)$ in singulären Punkten und Ebenen der F_3 untersucht *K. Rohn,* Math. Ann. 23 (1884), p. 82. Vom Standpunkt der Strahlensysteme aus erscheint die $H(F_3)$ bei *A. Voss,* Math. Ann. 30 (1887), p. 227. *Fr. Dumont,* Nouv. Ann. (3) 15 (1896), p. 312, 318, konstruiert die F_3 rückwärts aus ihrer H, als einer gewissen F_4 mit 10 d_2, und bringt diese Konstruktion in Verbindung mit der Abbildung der F_3 (Nr. **11**). *R. A. Roberts,* Quart. J. 29 (1897), p. 279 [s. auch die beiden Vorarbeiten London Math. Soc. Proc. 16 (1885), p. 238; 18 (1887), p. 202] studiert „*Poncelet*sche“ Polygone und Polyeder, die aus Schmiegungsebenen gewisser C_3 entstehen. *J. I. Hutchinson* verfolgt gewisse Konfigurationen auf $H(F_3)$, Amer. Math. Soc. Bull. (2) 5 (1899), p. 282, die vorher *G. Humbert,* J. de math. (4) 10 (1894), p. 169, mit transzendenten Hilfsmitteln untersucht hatte, sowie gewisse C_5 und C_6 auf $H(F_3)$, ebenda (2) 6 (1900), p. 328, von denen 4 resp. 6 Arten unterschieden werden, sowie gewisse Konfigurationen derselben. Mit Hilfe gewisser Potenzgesetze von *P. Serret,* Géom. de direction, Paris 1869, leitet weitere Eigenschaften der $H(F_3)$ ab *H. W. Richmond,* Quart. J. 33 (1902), p. 331. *R. M. Solowjew,* Moskau Math. Samml. 25 (1905), p. 386, studiert, in Analogie zur *Cayley*schen Kurve einer c_3, die Kongruenz der Verbindungsgeraden reziproker Pole und bestimmt deren Ordnung und Klasse.

11) Man adoptiere hier zur Ergänzung die auf *Plücker* zurückkehrende, wenn auch erst später von *Clebsch* genauer formulierte Schlußweise, daß bei gleicher Konstantenanzahl eine Form in eine andere gleicher Ordnung entweder stets, oder aber, wenn erst nach Erfülltsein von (einer oder mehreren) Bedingungen, noch auf unendlich viele Weisen überführbar sei (s. Note 3). Bei seinem ersten Beweise des Pentaedersatzes verfährt *Clebsch,* J. f. Math. 58 (1861), p. 109, ganz ähnlich wie *Sylvester* im Texte.

Für den „*Pentaedersatz*“ gab *A. Clebsch*[12]) einen direkten Beweis. Die Gleichung der ersten Polare F_2 der F_3 ist $\sum y_i \frac{\partial F_3}{\partial x_i} = 0$. Die Gleichung der Kernfläche F_4 erhält man durch Nullsetzen der Determinante $\Delta = \left| \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_i \partial x_k} \right|$, die entsteht durch Elimination der y_i (oder auch der x_i) aus vier in den x_i, y_i bilinearen und symmetrischen Gleichungen. Sollen diese vier Gleichungen nur zweien äquivalent sein, so müssen alle dreireihigen Minoren von Δ verschwinden, was für zehn Wertsysteme der x eintritt. Es gibt also zehn Punkte der F_4, deren erste Polare bzgl. der F_3 je in ein Ebenenpaar zerfällt, und jene zehn Punkte ordnen sich in der Tat mit den Kanten der zehn Ebenenpaare zum Pentaeder zusammen.

Zur Bestimmung der zehn Ecken wird eine Gleichung zehnten Grades aufgestellt, deren Auflösung auf die einer Resolventengleichung vom fünften Grade zurückkommt.

---

12) *Clebsch*, J. f. Math. 59 (1861), p. 193 (s. den Schluß von Note 11). *Clebsch* führt die Untersuchung bis zu einem gewissen Ziele allgemein für F_n durch, deren *Hesse*sche Fläche $4(n-2)^3$ Doppelpunkte von besonderer Konfiguration besitzt. Das im Texte skizzierte Verfahren von *Clebsch* läßt sich auf eine beliebige vierreihige symmetrische Determinante D ausdehnen, deren Elemente quaternäre Linearformen sind. Das gleichzeitige Verschwinden aller ersten Minoren findet wiederum für 10 Wertsysteme der Variabeln statt, s. *Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198. Die Gleichung $D = 0$ liefert das „Symmetroid“, eine F_4 mit 10 d_2 (s. „*Timerding*“, p. 853). Diese hängt eng zusammen mit der r_6, s. *J. R. Conner*, Amer. J. math. 37 (1914), p. 29, und *A. B. Coble*, ebenda 41 (1919), p. 243; 46 (1924), p. 143. Letzterer zeigt in der zweiten Arbeit umgekehrt, wie zu gegebenem Symmetroid noch 4 Typen von r_6 gehören, und deckt das Auftreten dieser Figur in der Theorie zweier C_3, sowie in der Theorie der *Abel*schen Modularfunktionen ($p = 4$), auf. Das Symmetroid ist durch eine gewisse *Cremona*transformation überführbar in die unter Note 3a) angeführte F_4 mit 10 g von *W. Fr. Meyer*. — Den Pentaedersatz bewiesen synthetisch *Cremona* und *Sturm* (Nr. **15**), sowie „*Reye*“, p. 113; formentheoretisch mit Hilfe der Symbolik *P. Gordan*, Math. Ann. 5 (1872), p. 341, wobei die Pentaederform als einfache Kontravariante der F_3 erscheint; endlich *Reye*, J. f. Math. 78 (1874), p. 114, vermöge seines Prinzips „der höheren Momente“, das er auch auf die analoge Kanonisierung der F_4 als Summe von 10 Biquadraten anwendet. Ergänzungen zur *Reye*schen Methode und Weiterführungen bei Flächen höherer Ordnung finden sich bei *A. C. Dixon*, London Math. Soc. Proc. (2) 4 (1906), p. 223, und besonders bei *Ew. Boldewig*, Giorn. di mat. 65 (1926), p. 81. Mit Hilfe allgemeiner Sätze über lineare Systeme im S_n stellt *F. Palatini* die quinäre F_3 (auf noch ∞^1 Arten) als Summe von acht Kuben dar, Tor. A. 38 (1903), p. 43; vgl. auch die analoge Behandlung der c_n, Rom Linc. Rend. (5) 15 (1903), p. 378. — Bezüglich der mannigfaltigen weiteren Ausdehnungen auf den S_n sei auf „*Baker*“, IV, sowie den Art. III C 7, *C. Segre*, Mehrdimensionale Räume, bes. Nrn. **34** und **42** verwiesen. Wegen der Beweise von *H. Toeplitz* und *W. Fr. Meyer* s. Nr. **20** und Nr. **19**.

4. Singularitäten. Klasse der Fläche. Einteilung in Arten nach Schläfli und Cayley. Die Zahl ν für die Klasse der F_3 reduziert sich nach *Salmon*[6]) (1847) um resp. 2, 3, 6 je nach dem Auftreten eines gewöhnlichen, biplanaren, uniplanaren Doppelpunktes.

Später hat *L. Schläfli*[13]) auf Grund kanonischer Gleichungsformen die nicht zerfallenden F_3 nach Maßgabe aller auftretenden Singularitäten in 22 Arten (species) eingeteilt, vgl. „*Salmon-Fiedler*“, Art. 291.

Vorab sind die verschiedenen Singularitätenmöglichkeiten aufzuzählen; der Index des *Schläfli*schen Zeichens gibt jeweils die Anzahl der Einheiten an, um die die Klasse ν der F_3 beim Auftreten der betreffenden Singularität verringert wird.

Bei Parallelkoordinaten x, y, z sei der Anfang O die zu untersuchende Singularität, so daß F_3 die Gestalt annimmt:

$$F_3 = c_2 + c_3, \tag{2}$$

wo c_2 eine quadratische, c_3 eine kubische ternäre Form in x, y, z bedeutet. Nach z geordnet, sei

$$c_3 \equiv a_0 z^3 + z^2(a_1 x + b_1 y) + z f_2(x, y) + f_3(x, y). \tag{2'}$$

Es sind drei Hauptfälle zu unterscheiden.

Erstens, Fall C: O ist ein *gewöhnlicher Knotenpunkt* C_2; c_2 ist eine eigentliche Form mit einer Determinante $D \neq 0$; Typen: $xz - y^2$, $x^2 + y^2 + z^2$ ($c_2 = 0$ ist der Tangentenkegel in O).

Zweitens, die *Fälle B* eines *biplanaren Knotenpunktes* in O; c_2 zerfällt in ein Paar verschiedener, reeller oder konjugiert imaginärer

13) *Schläfli*, London Trans. 153 (1863), p. 193; vgl. *K. Bobek*, Wien Ber. 96 (1887), p. 355. Am Schlusse, p. 251, fügt *Cayley* als eine neue Art die nach ihm benannte Regelfläche hinzu, auf die, wie *Cayley* selbst angibt, bereits *M. Chasles*, Paris C. R. 53 (1861), p. 884 hingewiesen hatte. (S. auch Nr. **14**, Note 51.) Die 23 Arten von F_3 werden einfacher, direkt aus den Klasseneigenschaften heraus, hergeleitet von *A. B. Basset*, Nature 1905, p. 72 und ausführlicher „*Basset*“. Über die Herleitung der 23 Arten mittels der *Cayley*schen Involution durch *F. Pobanz* s. Note 2. Den „Zusammenhang“ der einzelnen Arten diskutiert eingehend, im Zusammenhang mit der Abbildung der F_3 (Nr. **11**), *A. Comessatti*, Ann. di mat. (3) 23 (1915), p. 215. Zugrunde liegt der von *F. Klein*, Math. Ann. 7 (1874), p. 549; 9 (1876), p. 476, eingeführte Begriff der „Zusammenhangstransformationsgruppe“, woraus sich derjenige „äquivalenter“ Flächentypen entwickelt. Auf gewisse Ausnahmefälle des Zusammenhanges macht *A. Tonelli* aufmerksam, Rom Linc. Rend. (5) 2 (1893), p. 15. Neuerdings ist der Zusammenhang von Flächen allgemeiner vom Gesichtspunkt automorpher Transformationen aus verfolgt, s. *J. Bromius*, Amst. Versl. 18 (1909), p. 176; *R. Brouwer*, Math. Ann. 69 (1910), p. 176, sowie den Art. III AB 12, *H. Tietze-M. Vietoris*, Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. — Auf Grund der Erzeugung der F_3 durch projektive Büschel (s. Nr. 8) studiert ihre Singularitäten *A. Versluys*, Liège Mém. 20 (1895).

Linearfaktoren, D verschwindet, aber nicht alle ersten Minoren, d. i. der Kegel c_2 artet aus in ein Paar getrennter Ebenen mit der *Durchschnittskante* k (Typen xy, $x^2 + y^2$).

Erster Unterfall B_3: $k(x = 0, y = 0)$ gehört der F_3 nicht an, so daß $a_0 \neq 0$.

Zweiter Unterfall B_4: $k(x = 0, y = 0)$ gehört der F_3 an, so daß $a_0 = 0$; dagegen fällt die die F_3 längs k berührende Ebene $f_1 \equiv a_1 x + b_1 y = 0$ mit keiner der beiden „Ebenen" von O zusammen, so daß $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

Dritter Unterfall B_5: Es tritt gerade der letzthin ausgeschlossene Fall ein, so daß entweder a_1 oder b_1 verschwindet.

Vierter Unterfall B_6: Jede Ebene durch k berührt die F_3 längs k, d. h. f_1 verschwindet identisch ($a_1 = b_1 = 0$).

Drittens, die *Fälle A* eines *uniplanaren Knotenpunktes* in O: c_2 artet in das Quadrat einer Linearform, etwa x^2, aus — alle ersten Minoren von c_2 verschwinden — d. i. der Kegel c_2 ist eine Doppelebene ($x = 0$). Diese Ebene trifft den kubischen Kegel $c_3 = 0$ in drei Geraden, die entweder alle verschieden sind, oder aber es fallen genau zwei derselben zusammen oder endlich alle drei. Je nachdem treten die drei Unterfälle A_6, A_7, A_8 ein.

Die 21 Arten von F_3 — die 22te und 23te sind die beiden Regelflächen mit der Klasse 3, s. Nr. **14** — mögen mit *Schläfli* in einer Tabelle vereinigt werden: die erste Zeile gibt jeweils die Klasse ν an, die zweite die zugehörige Singularität S:

ν	12	10	9	8	8	7	7	6	6	6	6
S	0	C_2	B_3	$2C_2$	B_4	$B_3 + C_2$	B_5	$3C_2$	$2B_3$	$B_4 + C_2$	B_6

ν	6	5	5	5	4	4	4	4	4	3
S	U_6	$B_3 + 2C_2$	$B_5 + C_2$	U_7	$4C_2$	$2B_3 + C_2$	$B_4 + 2C_2$	$B_6 + C_2$	U_8	$3B_3$

Schläfli bestimmt auch die „Zusammenhangszahlen" der einzelnen Arten (vgl. Nr. **17**).[13a])

In einer ergänzenden Arbeit, in der für jede Art die Lagerung der „Geraden" und „Ebenen" durch Angabe der zugehörigen Gleichungen sowie durch schematische Diagramme illustriert wird, hat *Cayley*[14]) insbesondere auch die zugehörigen Reziprokalflächen studiert.

13a) S. noch *Schläfli*, Ann. di mat. (2) 5 (1873), p. 289; 7 (1876), p. 193, wo die fünf Typen der reellen F_3 die Zusammenhangszahlen 12, 8, 4, 0, — 4 erhalten. S. über den Zusammenhangsbegriff die kritischen Ausführungen von *A. Tonelli*, Gött. Nachr. 1875, p. 387; Rom Linc. Rend. (5) 2 (1893), p. 15.

14) *Cayley*, London Trans. 159 (1869), p. 231 = Papers 6, p. 359. Wegen der Reziprokalflächen vgl. besonders ebenda, p. 201 = Papers 6, p. 329.

5. Fortsetzung. Einfluß der Singularitäten auf die 27 Geraden und 45 Ebenen. Auch beim Auftreten von Doppelpunkten bleiben die Anzahlen der 27 Geraden und 45 Ebenen nach *Salmon* gültig[15]), wenn man nur Gerade oder Ebenen, die durch Doppelpunkte gehen, mit geeigneter Vielfachheit zählt. *Schläfli* und *Cayley* haben wiederum eine erschöpfende Diskussion aller möglichen Fälle gegeben (s. Nr. 4).

6. Realitätsverhältnisse bei den 27 Geraden und 45 Ebenen. Die fünf Schläflischen Typen singularitätenfreier Flächen. *Schläfli* (l. c.) hat überdies die Realitätsverhältnisse der 27 Geraden und 45 Ebenen eingehend erörtert, ebenfalls auf Grund kanonischer Gleichungsformen. Die 21 Arten von F_3 zerfallen dadurch wieder in eine Reihe von Unterarten. So sind bei singularitätenfreien F_3 fünf Unterarten (Typen) zu unterscheiden, je nachdem von den Geraden resp. Ebenen reell sind: 1) 27, 45; 2) 15, 15; 3) 7, 5; 4) 3, 13; 5) 3, 7, wie mittels geometrischer Methoden (Nr. **15**) *Cremona* und *Sturm* bestätigt haben (s. Nr. **11**). Man hat hierbei die jeweils nicht reellen Geraden in „punktierte" und „imaginäre" zu sondern, je nachdem sie einen reellen Punkt tragen oder nicht, also mit ihrer konjugiert imaginären inzident sind oder nicht.

Eigenartig ist der vierte Typus, insofern bei ihm auf der F_3 keine reelle kubische Raumkurve liegt, sondern immer nur (∞^2) Paare von konjugiert-imaginären solcher (s. Nr. **11**).

7. Graßmanns Erzeugungen der Fläche. Für die Erzeugungen der F_3 ist ein wesentlicher Gesichtspunkt von *H. G. Graßmann*[16]) entwickelt worden, der von allgemeinerer Grundlage ausgeht. Seine *„stereometrische Multiplikation"* führt ihn zu linealen Erzeugungen der F_n überhaupt, die nur die einfachsten Raumelemente (Punkt, Gerade, Ebene) benutzen.

Für $n = 3$ fließt daraus eine Reihe von Erzeugungen, deren

---

15) *Salmon,* Cambridge Dublin J. 4 (1849), p. 252. — *L. Zängl,* Wien Ber. 126 (1917), p. 857 bestätigt die schon von *„Sturm"* ausgesprochene Vermutung, daß der vierte *Schläfli*sche Realitätstypus überhaupt nicht durch eindeutige Abbildung der F_3 auf eine Ebene (Nr. **11**) erhalten werden kann. Zu dem Behuf bedient er sich allgemein einer „Abbildung p^{ter} Ordnung" der F_3, bei der an Stelle des c_3-Gebüsches ein geeignetes Gebüsch von c_p tritt.

16) *Graßmann,* J. f. Math. 49 (1855, dat. Juli 1852), p. 47, bes. p. 64. Vgl. die Biographie *Graßmanns,* Math. Ann. 14 (1880), bes. p. 1, sowie *Sturm,* ebenda 14 (1879), bes. p. 17 ff. und *R. Mehmke,* „Punktrechnung" 1, Leipzig 1913, p. 238. Hierbei sei auf einige Arbeiten hingewiesen, die die F_3 nach *Graßmann*schen Prinzipien behandeln: *H. Fritz,* Progr. Ludwigsgymn. Darmstadt 1889 (wo die F_3 als ausgeartete F_4 erscheint); *J. Haft,* Soc. Arg. 29 (1890); *St. Jolles,* Arch. Math. (3) 16 (1910), p. 1.

fruchtbarste nach *Graßmann* benannt worden ist; danach entsteht, als ein direktes Analogon zur Erzeugung eines Ordnungskegelschnittes durch zwei projektive Strahlbüschel, eine allgemeine F_3 als Ort des Schnittpunktes je dreier zugeordneter Ebenen von drei kollinearen Ebenenbündeln (s. Nr. **11**, wo auch auf eine Einschränkung hingewiesen ist). Die synthetische Ausführung dieser Erzeugung, insbesondere der Nachweis der 27 Geraden und 45 Ebenen von da aus, gebührt *H. Schroeter*.[17])

Die Fläche wird von einer beliebigen Ebene in einer allgemeinen (elliptischen) c_3 geschnitten. Während ein Punkt die c_3 beschreibt, umhüllen die zugeordneten Ebenen eines jeden der drei Bündel einen Kegel dritter Klasse. Darauf beruht es, daß es sechsmal vorkommt, daß sich drei entsprechende Ebenen in einer Geraden schneiden. Solche sechs (windschiefe) Gerade bilden dann eine „Sechs" (halbe „Doppelsechs") (Nr. **10**). Eine Doppelsechs sei mit $\overline{6}$ bezeichnet.

Der analytische Beweis findet sich schon früher bei *Schläfli*[18]), nur daß bei ihm das Moment der Erzeugung zurücktritt. Er geht von der *Salmon*schen Gestalt (Nr. **2**) der F_3-Gleichung $x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 = 0$ aus, schreibt die linke Seite als dreireihige Determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 \end{vmatrix}$, zeigt, wie deren Elemente als beliebige quaternäre Linearformen angenommen werden dürfen, und gelangt mittels einfacher Determinantensätze zur Existenz einer Doppelsechs, und von da aus zu der der übrigen. Der Unterschied zwischen zwei halben Doppelsechsen entspricht dem zwischen horizontalen und vertikalen Reihen der Determinante. Daher gibt es auch für jede Doppelsechs zwei verschiedene Scharen von Erzeugungen der F_3, und entsprechend von C_3 auf der Fläche (s. Nr. **11**).[19]) Umgekehrt bestimmt irgendeine Doppelsechs die F_3 eindeutig.

Man gehe von fünf windschiefen Geraden $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$ aus, die nur der einen Bedingung genügen sollen, eine Transversale (b_6) zu besitzen — oder auch umgekehrt von einer Geraden (b_6) und fünf windschiefen, sie treffenden Geraden $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$. Je vier der fünf Geraden (a) besitzen eine zweite Transversale $(b_1, b_2, \ldots, b_5)$. Dann

Auf einen Ausnahmefall, wo die *Graßmann*sche Erzeugung der F_3 versagt, weist *C. Segre* 1908 hin, wie *A. Terracini*, Giorn. di mat. 49 (1910), p. 40 erwähnt, s. auch Nr. **8**.

17) *Schroeter*, J. f. Math. 62 (1863), p. 265.

18) *Schläfli*, Quart. J. 2 (1858), p. 110, bes. p 114—115.

19) Vgl. *„Reye"*, p. 53, wo die drei Ebenenbündel reziprok auf eine Abbildungsebene (Nr. **11**) bezogen werden.

kommt auch („Satz der Doppelsechs") diesen fünf Geraden (b) eine Transversale (a_6) zu, womit die Doppelsechs festgelegt ist, für sich ein elementar stereometrischer Satz, dessen elementarer Beweis aber auf Schwierigkeiten stößt. Durch die so ihr auferlegten $4 + 5 \cdot 3 = 19$ linearen Bedingungen ist die F_3 eindeutig bestimmt. Die 15 weiteren Geraden c_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, 6;\ i \neq k)$ entstehen als Schnitte je zweier Ebenen (a_i, b_k) und (a_k, b_i).

Die 45 Ebenen setzen sich zusammen aus den 30 Ebenen (a_i, b_k, c_{ik}) und den 15 weiteren vom Typus (c_{ik}, c_{lm}, c_{np}).

Geometrisch hat den Zusammenhang zwischen allen, ein und derselben dreireihigen Determinante entsprechenden Erzeugungen *F. Schur*[20]) untersucht. Als gemeinsames Band erscheint der Satz, daß die sechs Paare windschiefer Geraden einer Doppelsechs je konjugiert sind in bezug auf eine F_2 („*Schur*sche F_2"). *Schur* gründet den Beweis auf eine für die c_3 bestehende Schließungseigenschaft.

Eine Doppelsechs ist somit in diesem Sinne zu sich selbst dualistisch. Dies steht in Übereinstimmung mit den ∞^2 kubischen Ordnungskurven C_3 (Nr. **11**), die die Geraden einer halben Doppelsechs

20) *Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1; *Reye,* Math. Ann. 55 (1901), p. 257; *Griewe,* London Math. Soc. Proc. (2) **12** (1913), p. 315; *Baker,* ebenda (2) **11** (1912), p. 285, der nur projektive Eigenschaften von Gebilden zweiten Grades als Beweismittel braucht, vgl. auch den analogen, synthetisch entwickelten Gedankengang bei *G. T. Bennett,* London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1910), p. 336; *de Vries,* Amst. Versl. 24 (1916), p. 1447, 1610. Neuerdings hat *E. Jolliffe,* Mess. (2) 55 (1926) p. 136 zwei weitere relativ elementare Beweise für den *Schur*schen Satz erbracht, einen projektiven und einen metrischen, in Anlehnung an *Baker.* Der erstere beruht auf dem Hilfssatze, daß, wenn ein Hyperbolid F_2 einem Tetraeder T umbeschrieben ist, jede Erzeugende der F_2 die vier Seitenflächen von T sowie die vier durch die Ecken gehenden Erzeugenden der andern Schar in vier Punktepaaren einer Involution trifft. Der metrische Beweis beruht auf der Bildung des Produktes gewisser Doppelverhältnisse. — Vom Gesichtspunkt der *Cremona*-Transformationen aus behandelt die $\bar{6}$ *E. Kasner,* Amer. J. f. Math. 25 (1903), p. 117; insbesondere stellt *E. Stenfors,* Die Schläflische Konfiguration . . ., Helsingfors 1924, die verschiedenen Typen bei automorphen Kollineationen auf und leitet hierbei neue Konstruktionen der $\bar{6}$ ab. — *J. H. Grace,* Cambr. Phil. Trans. 16 (1898), dehnt den Satz der $\bar{6}$ auf sechs Gerade mit einer Transversale aus: *J. L. Wren,* London Math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 144 beweist dies mittels einer *Cayley*schen (2, 3)-Transformation. *J. Kubota,* Tôh. Rep. 6 (1917), p. 89 dehnt dies wiederum auf mehr als sechs Gerade aus; in Tôh. Rep. 14 (1924), p. 391 führt er den Satz der 6, wie den von *Grace* einheitlich zurück auf ein Prinzip der darstellenden Geometrie, wonach eine Raumgerade abgebildet wird auf ein Punktepaar in der Ebene, so, daß inzidente Raumgerade übergehen in Punktepaare mit parallelen Verbindungsgeraden. — Auch vom S_4 aus hat man die $\bar{6}$ betrachtet, s. *H. F. Baker,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 20 (1920), p. 133. — Im übrigen vgl. auch Nr. **10**.

zu Sehnen haben (während sie die Geraden der anderen halben Doppelsechs gar nicht, die 15 weiteren Geraden einmal treffen), und den ∞^2 kubischen Klassenkurven Γ_3, die die sechs Geraden der zweiten halben Doppelsechs zu Achsen haben. Je ein Paar (C_3, Γ_3) ist in bezug auf eine *Schur*sche F_2 konjugiert, insofern die Polarebenen der Punkte der C_3 die (Schmiegungs-)Ebenen der Γ_3 sind, und vice versa. Zu der Doppelsechs gehört entsprechend dualistisch eine Fläche dritter Klasse Φ_3, die von den Ebenen durch jede der zwölf Geraden der Doppelsechs berührt wird.

Reye[20]) geht ebenfalls aus von einer Doppelsechs: die Geraden je einer Sechs sind die gemeinsamen Sekanten von ∞^2 C_3 resp. C_3' auf der F_3; je zwei C_3 resp. C_3' haben einen Punkt gemein, während jede C_3 jeder C_3' in fünf Punkten begegnet (s. auch Nr. **11**), so daß jedes Paar (C_3, C_3') den vollen Schnitt der F_3 mit einer F_2 darstellt. Solcher „Verbindungs-F_2" gibt es ∞^4; es lassen sich neun linear unabhängige unter ihnen herausgreifen. Dann existiert eine bestimmte, zu diesen neun und damit zu allen ∞^4 F_2 konjugierte H_2, die „*Reye*sche *Hauptfläche*", die sich als unabhängig von der Auswahl der ursprünglichen Doppelsechs erweist und zu den 36 *Schur*schen F_2 in den mannigfaltigsten Beziehungen steht.

Die Reziproke der F_3 in bezug auf diese Hauptfläche H_2 ist eine kovariante Fläche Φ_3 von bemerkenswerten Eigenschaften. Die H_2 erscheint zugleich als umhüllt von den Ebenen von ∞^2 Polfünfecken $(P_i, P_k, P_l, P_m, P_n)$, derart, daß der Pol jeder der zehn Ebenen (P_i, P_k, P_l) auf der Gegenkante (P_m, P_n) liegt.

Diese Untersuchung wird von *A. B. Griewe*[20]) weitergeführt. Es zeigt sich, daß der obige Pol gerade der Restschnittpunkt der Gegenkante (P_m, P_n) mit der F_3 ist. Insbesondere werden die ausgearteten C_3 verfolgt, und umgekehrt systematisch die g der F_3 als ausgeartete C_3 (s. auch Nr. **11**) betrachtet nach dem Vorgange von *H. F. Baker*[20]), der u. a. unter diesem Gesichtspunkte die Gleichungen der 36 *Schur*schen F_2 aufstellt.

J. de Vries[20]) führt die *Reye*sche Figur der ∞^1 C_3 auf der F_3, die einen festen Punkt gemein haben, weiter aus; er bestimmt den Komplex der Sekanten jener C_3, und insbesondere die in ihm enthaltenen rationalen Kegel.[20a])

20a) Die sechs Argumentenpaare der sechs gemeinsamen Sehnen der ∞^1 C_3 und einem gemeinsamen Punkte, gebildet für irgendeine derselben, sind an drei invariante Bedingungen geknüpft, dieselben, die zwischen den sechs Argumentenpaaren der sechs d_2 einer r_5 herrschen, s. Nr. **19**.

8. Steiners Erzeugungen der Fläche. Konjugierte Trieder. Die von *J. Steiner*[21]) ohne Beweis aufgestellten und nach ihm benannten[22]) Erzeugungen der F_3, auf Grund deren er eine Fülle von Einzelergebnisse mitteilt, lassen sich auffassen als Modifikationen resp. Spezialfälle der *Graßmann*schen.

Eine Modifikation ist es, wenn die F_3 entsteht durch projektive Zuordnung eines Ebenen- und eines F_2-Büschels (II). Ein Spezialfall ist es, wenn die F_3 erscheint als Ort des Schnittpunktes der Polarebenen in bezug auf drei feste F_2, eines in einer Ebene variabeln Punktes (IV).

Desgleichen, wenn durch die neun Geraden, in welchen sich die Ebenen zweier beliebiger Dreikante (*Steiner*sche Trieder) schneiden, ein Büschel von F_3 geht (s. Nr. 2).[23]) Nimmt man noch außerdem einen Punkt P an, den die F_3 enthalten soll, so trifft jede Ebene durch P die neun Geraden in neun Punkten, die mit P eine c_3 bestimmen; der Ort der c_3 ist eine allgemeine F_3 (I).

Die 27 Geraden werden wie bei *Salmon* (Nr. 2) hergeleitet. Das in Rede stehende F_3-Büschel entsteht nach *Graßmann*scher Vorschrift durch die drei (uneigentlich) kollinearen Ebenenbündel (mit dem Para-

---

21) *Steiner*, Berlin Ber., Jan. 1856 = J. f. Math. 53, p. 133 = Werke, herausgegeben von *K. Weierstraß*, Berlin, 2 (1882), p. 651. Einige Berichtigungen zu *Steiner*schen Sätzen über F_3 bringt *R. Sturm*, Ztschr. Math. Phys. 45 (1900), p. 23; *Sturm* liefert auch eine Übersicht über *Steiners* F_3-Arbeiten, Bibl. Math. (3) 4 (1903), p. 160.

22) Vgl. die Zusammenstellung bei *Sturm*, Math. Ann. 23 (1884), p. 308 bis 310, auf die sich die römischen Ziffern des Textes beziehen. — Die Erzeugung (II) nimmt eine besondere, für die weitere Untersuchung der „Geraden und Ebenen" bequeme Gestalt (II′) an, wenn das Ebenenbüschel aus den Polarebenen eines festen Punktes P_0 in bezug auf das F_2-Büschel besteht; die F_3 erscheint dann als Ort der Berührungspunkte der von P_0 an die F_2 des Büschels gehenden Tangenten. (S. auch Nr. 12.) Vgl. die Durchführung bei *W. P. Milne*, Quart. J. 43 (1912), p. 207 (wo aber *Steiner* nicht erwähnt wird). Es ist indessen zu beachten, daß sich dieser Erzeugung (II′) vier Typen von F_3 entziehen, wie *A. Terracini* nachweist, Giorn. di mat. 49 (1912), p. 40. — Die Erzeugung (II′) läßt sich dahin verallgemeinern (s. Nr. 12, Note 45a), daß man durch den festen Punkt P_0 irgendeine Gerade g legt und auf ihr die Doppelpunkte D, D' der durch das F_2-Büschel bestimmten Involution markiert. Bei Variieren von g erfüllen D, D' die F_3. Durch P_0 selbst geht ein Individuum F_2' des Büschels; die in der Tangentialebene der F_2' gelegenen beiden Erzeugenden sind zwei Gerade der F_3. Umgekehrt, bei gegeben gedachter F_3, ist P_0 als Schnittpunkt irgend zweier inzidenter g der F_3 zu wählen; die Basiskurve des zugehörigen F_2-Büschels ist die Berührungskurve C_4 des von P_0 an die F_3 gehenden Tangentenkegels (s. Nr. 12 und 16).

23) In Nr. 2 wurde eine zehnte Gerade zur eindeutigen Festlegung der F_3 verwendet, was für die Konstruktion der weiteren Geraden vorteilhafter ist.

meter k):

$$(2)\quad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 k A_2 = 0, \quad \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 = 0, \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_3 C_3 = 0,$$

so daß die Gleichung des F_3-Büschels wird:

$$(2')\qquad A_1 B_2 C_3 + k A_2 B_3 C_1 = 0.$$

Solcher „konjugierter" Triederpaare gibt es nach *Steiner* bei gegebener F_3 120 (s. *Salmon* und Nr. **11**).

Die Realitätsverhältnisse der sechs Ebenen haben *Schläfli* (1858, l. c.), „*Sturm*" und „*Cremona*" (Nr. **15**) untersucht.

9. Erzeugungen der Fläche nach August, Sturm und Schroeter. Konjugierte Tetraeder. Weitere Erzeugungen. An die *Graßmann*schen und *Steiner*schen Erzeugungen der F_3 lehnen sich weitere an. So eine von *F. August*[24]) durch drei trilinear verknüpfte Ebenenbüschel. Im Prinzip deckt sich diese Erzeugung mit (2), da man nach *C. le Paige*[25]) die allgemeine trilineare Verwandtschaft durch lineare Transformation der drei Parameter λ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf die kanonische Gestalt $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 =$ konst. bringen kann.

Ferner sind zu erwähnen zwei Verallgemeinerungen von *Sturm*[26]), der einmal eine durch zwei projektive F_2-Büschel entstehende F_4 in eine F_3 und eine Ebene zerfallen läßt, andererseits die F_3 herstellt durch reziproke Zuordnung eines Strahlen- und eines F_2-Bündels. *Sturm* hat aber auch die verschiedenen Erzeugungsweisen daraufhin untersucht, wie sie die fünf Realitätstypen (Nr. **6**) der singularitätenfreien F_3 liefern; hierbei erleidet der Begriff der Gleichwertigkeit zweier Erzeugungen eine gewisse Einschränkung.

Durch Spezialisierung der ersteren *Sturm*schen Erzeugung ist

---

24) *August,* Diss. Berol 1862. Die *August*sche Erzeugung der F_3 findet man noch öfters wieder, zumeist unter anderen Namen, so bei *E. G.*, Nouv. Ann. (3) 13 (1891), p. 138 (F_3 und Φ_3 mit besonderer Berücksichtigung der fünf Realitätstypen); *J. W. Russell,* London Math. Soc. Proc. 26 (1898), p. 446; *W. H. Blythe,* Mess. (2) 34 (1905), p. 139. Vgl. auch die „trilineare" Verwandtschaft bei *Schubert,* Nr. **21**. *F. London,* Math. Ann. 44 (1894), p. 375 erzeugt nach der *August*schen Methode sämtliche Arten der F_3, nebst den zerfallenden.

25) *Le Paige,* Paris C. R. 92 (1881), p. 1099.

26) *Sturm,* Preisschrift von 1867, Nrn. 109, 110. Die erstere Erzeugung wird genauer verfolgt von *W. Burnside*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 15 (1911), p. 425 (s. auch Nr. **15**); die letztere von *A. Neumann,* Dissert. Breslau 1909. Nimmt man bei der letzteren die Koordinatenecke A_m als Zentrum des Strahlenbündels, so kommt die Erzeugung algebraisch darauf hinaus, die F_3 in der Gestalt darzustellen: $F_3 \equiv x_i F_2^{(i)} + x_k F_2^{(k)} + x_l F_2^{(l)}$, wo die F_2 in den x_i, x_k, x_l, x_m quadratisch sind.

H. Taylor[27]), indem er, ähnlich wie *Salmon* (Nr. 2), die vier der projektiven Erzeugung zugrunde liegenden F_2 in geeigneter Weise in Ebenenpaare zerfallen läßt, zu einer übersichtlichen Darstellung und Konstruktion der 27 Geraden (und 45 Ebenen) gelangt.

Seien A_i $(x_i = 0, i = 1, .., 4)$ vier Ebenen, die man als die eines Koordinatentetraeders wählen mag, $v = 0$ eine beliebige fünfte Ebene, und λ_i vier Parameter, so setze man die Identität an:

$$(3) \quad \prod_i(x_i) - \prod_i(y_i) \equiv \prod_i(x_i) - \prod_i(x_i - \lambda_i v) \equiv F_4 \equiv v \cdot F_3 .$$

Dann liefert die Gleichung $F_3 = 0$ eine F_3, die die zwölf Durchschnittsgeraden der Ebenenpaare $(x_i, y_k;\ i \neq k)$ enthält; von diesen gelangt man durch lineare Konstruktionen und eine quadratische zu den 15 übrigen Geraden. Man beachte, wie hier die F_3 in der rationalen Gestalt $\frac{F_4}{v}$ erscheint.

Ersichtlich liegt hier eine elementar-stereometrische Konfiguration vor, die zugleich eine Übertragung[28]) des *Pascal*schen Kegelschnittsatzes auf die Geraden einer F_3 repräsentiert.

Man schneide die vier Ebenen A_i eines Tetraeders mit einer fünften Ebene v, und lege jeweils durch die Schnittachse (v, A_i) eine beliebige weitere Ebene, so bilden die letzteren die Ebenen eines zweiten Tetraeders, die die nicht entsprechenden Ebenen des ersteren in $3 \cdot 4$ Geraden treffen; dann geht durch diese 12 Geraden eine (einzige) F_3.

---

27) *Taylor*, London Tranc. 185 (1894), p. 37. Hier fehlt aber der Nachweis, daß man so zu einer allgemeinen F_3 (mit 19 Konstanten) gelangt, sowie die Durchführung im Texte. Vgl. *W. Franz Meyer*, Deutsche Math.-Ver. 34 (1925), p. 158.

28) Reduziert man die Identität (3) auf den Fall der Ebene, so ergibt sich damit ein einfacher Beweis für die Umkehrung des *Pascal*schen Satzes, wo die Existenz der *Pascal*schen Geraden (v) vorausgesetzt wird. Die Umkehrung, d. i. der *Pascal*sche Satz selbst, erschließt sich daraus ohne weiteres auf Grund des Satzes, daß durch fünf Punkte ein Kegelschnitt bestimmt ist. — Von ganz anderem Charakter ist eine weitere, von *W. Fr. Meyer*, Deutsche Math.-Ver. 9_1 (1901), p. 91, herrührende Übertragung des *Pascal*schen Satzes auf eine F_3. Man lege ein windschiefes Vierseit zugrunde und markiere auf jeder Kante drei Punkte. Verbindet man dann je irgendeinen dieser Punkte der drei ersten Kanten durch eine Ebene, schneidet sie mit der letzten Kante in einem Restpunkte und fährt zyklisch so fort, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die gegebenen $4 \cdot 3$ Punkte einer F_3 angehören, die, daß die vier Restpunkte inzident sind. Insbesondere ergibt sich so, daß für ein windschiefes Vierseit von Haupttangenten der F_3 die vier Berührungspunkte inzident sind, und umgekehrt. Über ein anderes Auftreten des *Pascal*schen Satzes bei gewissen $15\,g$ der F_3 s. Nr. 18.

Zwei solche Tetraeder mögen, in Analogie zu den konjugierten Triedern (Nr. 3) „konjugiert“ heißen. Von den 15 g, die nach Ausschluß einer Doppelsechs verbleiben, sondere man drei solche ab, die eine T bilden. Die übrigen zwölf verteilen sich auf ein einziges Paar konjugierter Tetraeder. Die Ebenen je eines solchen Tetraeders ergänzen sich mit der abgesonderten T zu einem „T-Fünfflach“. Umgekehrt lassen sich aus den 15 g gerade sechs solcher Fünfflache bilden, die zu je zweien eine T gemein haben. Zu jeder der 36 Doppelsechsen gehören somit 15 solche Paare konjugierter Tetraeder, so daß es im ganzen 540 gibt (Nr. **11**).

Greift man umgekehrt bei gegebener F_3 irgendein solches Paar $(x; y)$ heraus, so liegen die vier Durchschnittsgeraden entsprechender Ebenen (x_i, y_i) in einer Ebene (v).

In Anlehnung an die *Graßmann*sche Erzeugung der F_3 hat *H. Schroeter*[29]) zwei weitere lineare Erzeugungen von elementar-stereometrischem Charakter synthetisch untersucht. Durch ihre Einfachheit beachtenswert ist die zweite. Gegeben seien ein Punkt P_0 und vier windschiefe Gerade, die man in zwei Paare (p, q) und (r, s) zerlege. Durch P_0 lege man den Bündel von Ebenen E_v, die die vier Geraden resp. in den Spuren (X_p, X_q), (X_r, X_s) treffen. Ist X der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $g_{pq} = (X_p, X_q)$ und $g_{rs} = (X_r, X_s)$, so ist der Ort von X eine allgemeine F_3.

Ohne weiteres erkennt man, daß außer den vier Geraden selbst auch deren beide Transversalen t_1, t_2 sowie die beiden Treffgeraden t_{pq} und t_{rs}, die von P_0 an (p, q) resp. (r, s) gehen, der F_3 angehören. Dabei bestimmen sich t_1 und t_2 durch eine quadratische Konstruktion, alle übrigen Geraden der F_3 linear.

Die Punkte X der F_3 sind auf das Bündel E_v gerade so, nur dualistisch bezogen, wie bei der *Clebsch*schen Abbildung (Nr. **11**) auf

---

29) *Schroeter*, J. f. Math. 96 (1884), p. 282. Bei der ersten Erzeugung sind gegeben zwei Ebenenbüschel mit den windschiefen Achsen a_1, a_2, ein Ebenenbündel mit einem festen Zentrum B, sowie zwei weitere windschiefe Gerade b_1, b_2. Ein laufender Punkt auf b_1 resp. b_2 liegt in einer Ebene (a_1) resp. (a_2) und beide Punkte in einer Ebene (B). Der Schnittpunkt der drei Ebenen erzeugt die F_3. Indessen ist diese Figur nur eine andere Auffassung von der Figur der zweiten Erzeugung. — Es ist nur eine Modifikation der zweiten Erzeugung, wenn *Fr. Deruyts*, Brux. Bull. (3) 22 (1891), p. 33 die F_3 erzeugt durch eine Ecke eines beweglichen Dreiecks, von dem zwei anstoßende Seiten sich auf zwei feste Gerade stützen, während die Gegenseite einen Strahlbüschel mit festem Zentrum beschreibt. Tritt an die Stelle des Strahlbüschels ein Kegel ν^{ter} Ordnung, so erscheint die F_3 ν-fach. Man erkennt sofort, daß die Einführung der Gegenseite überflüssig und das Dreieck durch einen Winkel ersetzbar ist.

die Punkte einer Ebene. Sind außer den vier Geraden drei beliebige Punkte X_i $(i = 1, 2, 3)$ gegeben, durch die die F_3 gehen soll, so bestimmen die jeweiligen Treffgeraden $(X_i pq)$, $(X_i rs)$ drei Ebenen E_i, die sich in P_0 treffen. Damit ist die ganze Konfiguration linear festgelegt.

Umgekehrt denke man sich eine F_3 gegeben, und auf ihr vier windschiefe Gerade in zwei Paaren (p, q), (r, s) herausgegriffen. Von jedem Punkte X der F_3 lege man die Treffgeraden an (p, q) und (r, s), so bestimmen diese eine Ebene E_ν. Diese Ebenen E_ν bilden dann ein Bündel, deren Spitze der Treffpunkt zweier Geraden der F_3 ist, eben von t_{pq} und t_{rs}.

Ergänzt man die Figur zu einer symmetrischen, indem man ein drittes Paar (t, u) von Geraden hinzunimmt, so daß die sechs Geraden eine Sechs (halbe Doppelsechs) der F_3 bilden, und kombiniert dann je zwei Paare, so sind die drei zugehörigen Punkte X_0, X_0', X_0'' die Berührungspunkte einer Ebene T.

Man kann auch die beiden Figuren von *Schroeter* und *Taylor* in Zusammenhang bringen. Dann beachte man, daß sich unter den zwölf Geraden zweier konjugierter Tetraeder sechs windschiefe Quadrupel befinden. Legt man irgendeines derselben der *Schroeter*schen linearen Erzeugung der F_3 zugrunde, so lassen sich aus dem Quadrupel zwei Paare derart bilden, daß die beiden zugehörigen Punkte P_0 Schnittpunkte von Geradenpaaren sind, die unter den zwölf Ausgangsgeraden vorkommen.

Die analytische Durchführung der *Schroeter*schen Erzeugung ist mit einigen Schwierigkeiten verknüpft.

Man wähle P_0 als eine Ecke A_m $(0, 0, 0, 1)$ des Koordinatentetraeders, so lautet die Gleichung des Ebenenbüschels E_ν: $\nu_i x_i + \nu_k x_k + \nu_l x_l \equiv (\nu x) = 0$. Die Linienkoordinaten von p bezeichne man mit $p_{ik} = p_l$ usf., $p_{ml} = \pi_l$ usf., und entsprechend mit $(q_i, \varkappa_i)$, (r_i, ϱ_i), (s_i, σ_i) für die drei weiteren Geraden q, r, s. Ferner setze man $J_p = (\nu p)_{kl}$, $K_p = (\nu p)_{li}$, $L_p = (\nu p)_{ik}$, $M_p = \nu_i \pi_i + \nu_k \pi_k + \nu_l \pi_l \equiv (\nu \pi)$, usf.

Dann sind die Koordinaten eines laufenden Punktes von g_{pq} resp. g_{rs} von der Form: $tJ_p + t'J_q, \ldots, tM_p + t'M_q$ resp. $-uJ_r - u'J_s, \ldots, -uM_r - u'M_s$, und ein Punkt X der F_3 hat den vier linearen Gleichungen zu genügen:

$$J \equiv tJ_p + t'J_q + uJ_r + u'J_s = 0, \quad K = 0, \quad L = 0,$$
$$M \equiv tM_p + t'M_q + uM_r + u'M_s = 0,$$

aus denen die Werte der t, t', u, u' zu entnehmen sind. Mit Rücksicht auf die Syzygie $\nu_i J + \nu_k K + \nu_l L \equiv 0$ kann man etwa die Gleichung $L = 0$ unterdrücken.

Damit erhält man für die Koordinaten x von X:

$$\varrho x_i = -(\nu pq)(JM)_{rs} + (\nu rs)(JM)_{pq}, \ \ldots,$$
$$-\varrho x_m = M_q M_s(\nu pr) - M_q M_r(\nu ps) + M_p M_r(\nu qs) - M_p M_s(\nu qr).$$

Diese Darstellung läßt sich auf Grund der Zerlegungen $(JK)_{rq} = \nu_l(\nu pq)$ usf. vereinfachen.

Setzt man sodann $v_i = M_q p_i - M_q p_l$, $w_i = M_s r_i - M_r s_i$ $(i,k,l = 1, 2, 3)$, so werden die x proportional den Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \nu_i & \nu_k & \nu_l & 0 \\ v_i & v_k & v_l & (\nu pq) \\ w_i & w_k & w_l & (\nu rs) \end{vmatrix}, \tag{4}$$

und die Gleichung der F_3 erscheint in der Form

$$F_3 \equiv (xyz) = 0, \tag{4'}$$

wo

$$\begin{cases} y_i = \varkappa_i(px) - \pi_i(qx) + x_m(pq)_{kl}, \\ z_i = \sigma_i(rx) - \varrho_i(sx) + x_m(rs)_{kl}, \end{cases}$$

womit die *Clebsch*sche Darstellung (Nr. **11**) erreicht ist.

Durch elementare Umformungen von (4') erkennt man, wie die Geraden p, q, r, s, t_1, t_2, t_{pq}, t_{rs} der F_3 angehören. Durch geeignete Spezialisierung des Koordinatentetraeders lassen sich praktisch weitere Vereinfachungen von (4') erzielen, wodurch aber die Symmetrie des Aufbaus zerstört wird.

Auf noch weitere Erzeugungen der F_3 kann nur kurz hingewiesen werden. Sie stützen sich auf besondere Konfigurationen auf der F_3, insbesondere auf die eines windschiefen Fünfecks von verschiedenen Gesichtspunkten aus, bei *G. Affolter*[30]), *H. Picquet*[31]), *G. Kohn*[32]).

30) *Affolter*, Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 113. Gegeben ist ein windschiefes Fünfseit Φ, nebst einer zu seinen Seiten windschiefen Geraden g'. Irgendeine Ebene des Büschels (g') trifft die Seiten von Φ in fünf Punkten, die eine c_2 bestimmen; letztere erzeugt eine F_3. Die sechs Geraden der Figur liegen auf der F_3; die übrigen 21 lassen sich durch lineare und quadratische Konstruktionen herleiten (was auf diese Weise nach Angabe von *Schläfli* schon *Steiner* getan hat).

Zieht man indessen die Abbildung der Nr. **11** heran, so lassen sich die übrigen 21 g bei geeigneter Reihenfolge lediglich durch lineare Konstruktionen gewinnen. — Auf gegeben gedachter F_3 läßt sich noch in mannigfaltiger Weise ein Fünfseit Φ herausgreifen, z. B. $(a_i, b_k, c_{kl}, c_{mn}, c_{il})$. Es gehören dann noch zwei Gerade (c_{lm} und c_{ln}) dazu, deren jede die Rolle der obigen Geraden g' übernehmen kann. Stillschweigend gilt die Beschränkung auf eine F_3 mit 27 reellen g.

31) *Picquet*, Bull. Soc. math. 4 (1876), p. 128. Gegeben ist eine ∞^4-lineare Schar S von F_2 nebst einer Geraden g'. Irgendeine Ebene des Büschels (g')

Natürlich lassen sich alle Erzeugungen dem Schema $3 = 1 + 1 + 1$ unterordnen. Wirft man einen zusammenfassenden Rückblick auf alle diese und ähnliche Erzeugungen, so vermißt man bei deren Urhebern zumeist den Nachweis, daß die jeweils in Rede stehende Erzeugung wirklich zum „allgemeinen" F_3-Typus mit 19 Konstanten führt, wodurch allein sich die „Gleichwertigkeit" verschiedener Erzeugungen ergeben könnte. Überdies beschränken sie sich, was die Realitätsverhältnisse angeht, mit wenigen Ausnahmen (so *Schläfli, Sturm, Cremona*)

---

trifft S in einer entsprechenden Schar S' von c_2; der zu S' apolare Klassenkegelschnitt γ_2 erzeugt dann im allgemeinen eine F_3. Sooft aber die F_2 von S einen Grundpunkt G gemein haben, sondert sich von der F_3 eine Ebene ab. Besitzt daher S fünf Grundpunkte G — die umgekehrt S eindeutig bestimmen —, so erzeugt γ_2 eine (allg.) F_3.

Für jede der fünf Ebenen (g'), die durch einen G geht, stellt dieser, doppelt zählend, die zugehörige γ_2 dar. Läßt man indessen die variierende Ebene des Büschels sich dieser besonderen Lage (durch G) beliebig nähern, so erscheint γ_2 als ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkte G. Es ergeben sich so gerade die fünf Geradenpaare der F_3, die g' treffen (s. Nr. 2).

Greift man umgekehrt auf gegebener F_3 irgendeine (reelle) Gerade g' heraus, so gilt auch der Umkehrungssatz.

32) *Kohn,* Wien Ber. 99 (1890), p. 683. Es liege ein Bündel von C_3 mit fünf Grundpunkten G vor, nebst einem linearen Komplexe K_1. Dann erfüllen die Punkte, in denen ∞^2 Gerade von K_1 je von einer C_3 des Bündels berührt werden, eine (punktallg.) F_3. Jedes der fünf, K_1 angehörenden Geradenbüschel mit einem Zentrum G bildet die Tangenten der F_3 in G.

Auf Grund dieser synthetisch durchgeführten Erzeugung der F_3 werden über solche Gruppen von fünf Punkten auf gegeben gedachter F_3 Sätze bewiesen, die zum Teil bereits *E. Caporali,* Rom Linc. Rend. (3) 1 (1877), p. 232, 234; Napoli Rend. 20 (1881), p. 122, der sie „Polfünfecke" nennt, analytisch hergeleitet hatte. Es ergeben sich aber so noch andere bemerkenswerte Sätze, z. B. der folgende. Sind die fünf Ecken und zehn Diagonalpunkte eines räumlichen Fünfecks, zusammen mit noch zwölf weiteren Punkten A die Schnittpunkte von drei F_3, so liegen sie auch auf einer F_2, und die dem Fünfeck umbeschriebene und irgendeinem A bestimmte C_3 hat als Tangente in letzterem eine Erzeugende der F_2. S. die Ergänzungen bei *F. Gonseth,* Ens. math. 20 (1918), p. 90.

Noch sei auf zwei weitere eigenartige Erzeugungen der F_3 hingewiesen. Eine solche wird hergestellt vermöge einer eineindeutigen Beziehung zwischen den Punkten einer F_2 und den Geraden einer linearen Kongruenz von *G. Majcen,* Deutsche Math.-Ver. 14 (1905), p. 438; Wien Ber. 117 (1908), p. 631, wo daraufhin besonders die C_3 und C_4 auf der F_3 untersucht werden, desgl. Agram Ak. 175 (1909), p. 87; 178 (1911). Andererseits erscheint die F_3 mit drei d_2 als eine ausgeartete „*Weddle*sche F_4", der Ort der Spitzen der durch sechs Raumpunkte gehenden Kegel 2. Ordnung bei *F. Morley* und *J. R. Conner,* Amer. J. 31 (1909), p. 263. Hier finden die Methoden der Apolarität eine spezifische Verwendung. Über die *Weddle*sche F_4 s. Genaueres bei *C. Hierholzer,* Math. Ann. 4 (1871), p. 173; *E. Hunyady,* J. f. Math. 92 (1882), p. 304; vgl. Nr. 2, Note 3a.

auf den ersten Hauptfall, wo alle Geraden und Ebenen der F_3 reell ausfallen.

10. Schläflis Diskussion der 27 Geraden und 45 Ebenen. Sechsen und Doppelsechsen. Fünfen. Greift man mit *Schläfli*[33]), was noch auf 72 Weisen (s. auch Nr. **11**) möglich ist, aus den 27 Geraden sechs zueinander windschiefe a_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) heraus, so existiert ein komplementäres (konjugiertes) Sextupel b_i von ebenfalls windschiefen Geraden, derart, daß immer b_i alle a exkl. a_i trifft. Ein solches Paar von Sextupeln („Sechsen") heißt eine „Doppelsechs" („double six"). Jede der 15 Ebenen (a_i, b_k) trägt noch eine weitere Gerade c_{ik}, den Schnitt mit der konjugierten Ebene (a_k, b_i). Umgekehrt ist die ganze Figur bereits eindeutig bestimmt (s. auch Nr. **9**), wenn man von fünf windschiefen Raumgeraden ausgeht, die zugleich von einer sechsten (als der einzigen Transversale) getroffen werden („Satz der Doppelsechs"). Solcher „uneigentlichen Fünfen" von Raumgeraden gibt es eine ∞^{19}-Schar, in Übereinstimmung mit der Anzahl der 19 Konstanten einer

33) *Schläfli,* Quart. J. 2 (1858), p. 110, bes. p. 115. Einzelne Sätze über 2, 3, . ., 6 windschiefe Gerade der F_3 finden sich schon vorher bei *S. Brioschi,* Ann. fis. mat. 6 (1855), p. 374. An den „Satz der Doppelsechs" knüpft eine ganze Spezialliteratur an. Einen einfachen Beweis vermöge linearer Konstruktion der Figur gibt *A. C. Dixon,* Quart. J. 40 (1909), p. 381. Einen projektiven Beweis liefert *H. F. Baker,* London Roy. Soc. Proc. (A) 87 (1910), p. 597, einen anderen durch Rechnung London Math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 280. *E. R. Wakeford,* London Math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 340, weist nach, daß der Satz der Doppelsechs gleichwertig ist mit dem von *Miquel,* daß die Brennpunkte der fünf, den Teilvierseiten eines vollständigen ebenen Fünfseits einbeschriebenen Parabeln auf einem Kreise liegen, indem er eine C_3, die fünf der Geraden einer Sechs zu Sekanten besitzt, geeignet kollinear transformiert und dann projiziert. Eine Verallgemeinerung dieser Betrachtung findet sich bei *T. Kubota,* Tôhoku Sc. Rep. 6 (1917), p. 89, indem er die Leitstrahlen einer gewissen Schar linearer Kongruenzen auf die Kreise einer Ebene abbildet. Erweiterungen des Satzes auf sechs usf. Gerade, beim Studium von (2, 3)-deutigen *Cremona*-Transformationen, erhält *T. L. Wren,* London Math. Soc. Proc. (2) 15 (1916), p. 144. Eine Verallgemeinerung anderer Art, als eine Analogie zum *Desargues*schen Satze, leitet *L. Berzolari* ab, Palermo Rend. 20 (1905), p. 229. Eine Ausdehnung auf den S_5, als ein gewisser „Sechsflachsatz über F_2" findet sich bei *H. W. Richmond,* Cambridge Phil. Soc. Proc. 14 (1908), p. 475. Erwähnt sei noch, daß die Bedingung dafür, daß fünf Gerade eine Transversale besitzen, in einfacher Gestalt aufgestellt wird von *H. M. Taylor,* Mess. (2) 31 (1902), p. 135.

Ferner sei noch hingewiesen auf die Beziehungen der $\bar{6}$ zu den R_4 auf der F_3 bei *A. P. Thompson,* Mess. (2) 22 (1902), p. 130; das Verhalten der $\bar{6}$ gegenüber *Cremona*-Transformationen, bei *E. Kasner,* Amer. J. Math. 25 (1903), p. 117; die Behandlung der $\bar{6}$ vom S_5 aus bei *H. W. Richmond,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 14 (1908), p. 475 (s. oben), und vom S_4 aus bei *H. F. Baker,* ebenda 20 (1920), p. 153. Im übrigen vgl. Nr. **6**.

allgemeinen F_3-Gleichung. Dabei sind noch windschief die Paare der Typen $(a_i, c_{kl}; b_i, c_{kl}; c_{ik}, c_{il})$, dagegen inzident die Paare der Typen $(a_i, c_{ik}; b_i, c_{ik}; c_{ik}, c_{lm})$.

Die 45 Ebenen T setzen sich zusammen aus den $2 \cdot 15$ Ebenen (a_i, b_k, c_{ik}) und den 15 Ebenen (c_{ik}, c_{lm}, c_{np}).

Es gibt noch eine zweite Art von „Geradenfünfen", das sind die „eigentlichen", die sich nicht durch eine sechste zu einer Sechs ergänzen lassen, sondern zwei Transversalen besitzen, z. B. $c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{in}, c_{ip}$, mit den beiden Transversalen a_i, b_i.

Von Bedeutung ist der Satz von *J. Lüroth*[34]), wonach die F_3 erscheint als Ort der Punkte, von denen die Geraden einer Sechs als Tangenten einer γ_2 gesehen werden (s. auch Nr. **11**). Der Satz kann auch als eine neue Erzeugung der F_3 angesprochen werden.

11. Clebschs Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Geometrie auf der Fläche. Schiefe Projektion. Sekantenprojektion und Sekantenabbildung. Löst man nach *Clebsch*[35])[35a]) die Gleichungen von drei

34) *Lüroth* bei *Clebsch,* Math. Ann. 1 (1869), p. 258—259. Allgemein hat *G. Kohn,* Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 293, den Ort der Spitzen der Kegel (2. Ordnung) untersucht, die sechs beliebige windschiefe Gerade g berühren. Dieser Ort ist eine F_8, von der sich im besonderen fünf Ebenen abspalten, wenn die g eine „Sechs" bilden. — Den *Lüroth*schen Satz hat *G. Kohn,* Wien Ber. 114 (1905), p. 143 invariantentheoretisch dahin formuliert, daß für alle Punkte der F_3 der „Wurf" (Inbegriff der absoluten Invarianten) der sechs, eine „Sechs" projizierenden Ebenen konstant ist.

35) *Clebsch,* J. f. Math. 65 (1866, dat. Okt. 1865), p. 359. Auch *Cremona* gelangt in seiner Preisschrift (s. Nr. **15**) von 1866 auf synthetischem Wege zu der Abbildung. [Über eine Anwendung der Abbildung auf die Konstruktion einer c_4 durch 14 Punkte s. *H. Müller,* Progr. Lahr 1869.] Verbesserungen der *Cremona*schen Methode geben *C. Segre* und *R. Sturm,* Arch. Math. Phys. (3) 10 (1906), p. 209, 216, sowie *R. Sturm,* J. f. Math. 134 (1908), p. 288.

Die Abbildungen von *Clebsch* und *Cremona* verwenden *E. Caporali,* In Mem. *D. Chelini,* 1881, p. 144, und *F. Dumont,* Nouv. Ann. (3) 15 (1896), p. 318 für eine Reihe von Abzählungsfragen. — Die Abbildung der F_3 führt auch sofort zu einer Abbildung der Verwandschaft zwischen dem achten und neunten Schnittpunkt irgend zweier Individuen eines c_3-Netzes mit sieben gemeinsamen Grundpunkten; ihr entspricht die Verwandtschaft zwischen den beiden Restschnittpunkten der F_3 mit den Geraden eines Bündels, dessen Spitze auf der F_3 liegt. S. die nähere Ausführung bei *A. Emch,* Amer. Math. Soc. Proc. 30 (1924), p. 527, der auch, im Anschluß daran, gewisse Schließungsprobleme behandelt.

Die Darstellung der F_3 als dreireihige Determinante verfolgt in arithmetischer Hinsicht *W. P. Milne,* Ann. of Math. (2) 23 (1921), p. 70; Amer. J. Math. 43 (1922), p. 102, insbesondere für rationale Lösungen der Gleichung $F_3 = 0$. Andererseits bringt *W. P. Milne,* London Math. Soc. Proc. (2) 21 (1921), p. 134, 325, 373, die *Clebsch*sche Abbildung der F_3 in Zusammenhang mit der Apolaritätstheorie auf der c_3 und der *Weddle*schen Fläche, s. Nr. 2, Note 3a.

nach *Graßmann* (Nr. 7) kollinearen Ebenenbündeln nach den Koordinaten x_i eines Flächenpunktes Q auf, so werden die x_i proportional vier (homogenen) kubischen Formen $f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ der „Parameter" λ.

Die Abbildung gibt nicht nur über bereits bekannte Konfigurationen auf der F_3 (s. den Text) neue Aufschlüsse, sondern sie führt auch zu neuen Konfigurationen. Es kann hier nur auf einige Bildungen dieser Art hingewiesen werden. Nach *Cremona,* Ist. Lomb. Rend. 3 (1870), p. 209, lassen sich aus den 45 Ebenen der F_3 Neuntupel („*Ennaeder*") bilden, deren jedes die 27 Geraden ausschneidet; diese zerlegen sich in 40 „*erster Art*" und 160 „*zweiter Art*", je nachdem sie auf vier Arten oder aber nur auf eine in drei Trieder zerfallen (s. auch Nr. 22). — *E. Bertini,* Ann. di mat. 12 (1884), p. 301, hat überhaupt aus den 45 Ebenen alle Polyeder hergestellt, von denen keine Kante der F_3 angehört; dazu genügt die Bestimmung gewisser „*Hauptpolyeder*". — *G. Affolter,* Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 113, und besonders eingehend *Sturm,* Math. Ann. 23 (1884), p. 289, haben aus Geraden der F_3 geschlossene „*Vier-, Fünf-, Sechsseite*" gebildet (vgl. *Zeuthen,* Nr. 16). — Nach *F. Schur,* J. f. Math. 95 (1883), p. 207, lassen sich die Treffpunkte der 27 Geraden auf 45 Arten zu je 12 in drei „*desmischen Tetraedern*" anordnen; es kommt das einfach darauf hinaus, daß die Verbindungsgerade zweier Treffpunkte, an denen vier verschiedene Gerade partizipieren, die F_3 dann und nur dann in einem dritten solchen Punkt trifft, wenn die vier Geraden ein windschiefes Viereck bilden; eine solche Gerade heiße eine „Treffpunktegerade". Bei gegebenem windschiefem Viereck sind die beiden Diagonalen solche Treffpunktegeraden. Zu jeder Diagonale gehört ein Paar, aus Geraden der F_3 gebildeter, perspektiver Dreiseite; mithin treffen sich auch die Verbindungslinien entsprechender Ecken als drei Treffpunktgerade in einem Punkte der F_3. Vermöge der *Clebsch*schen Abbildung der F_3 ist eine leichte Übersicht der Figur möglich. Es lassen sich zwei Gegenseiten des Vierecks einer „Sechs" so entnehmen, daß die beiden andern Gegenseiten der konjugierten Sechs angehören. Man hat also nur einen Typus, etwa $\{a_i, a_k), (b_l, b_m)\}$. Greift man die beiden Treffpunkte (a_i, b_l) und (b_m, a_k) heraus, so sind c_{il} und c_{km} die zugehörigen Restgeraden, die in einem dritten Treffpunkte zusammenstoßen, und die beiden perspektiven Dreiecke, deren Ebenen sich in der Diagonale d schneiden, sind $(a_i, b_l, c_{il}), (b_m, a_k, c_{km})$. Die Verbindungsgeraden d_2, d_2', d_2'' zugeordneter Ecken inzidieren in einem Punkte D_2, und entsprechend der zweiten Diagonale d_2 existiert ein Inzidenzpunkt D_1.

Wir setzen die vollständigen Schemata her:

$$d_2 = \{(a_i, b_l), (b_m, a_k), (c_{im}, c_{kl})\}, \quad d_2' = \{(a_i, c_{il}), (b_m, c_{km}), (c_{im}, c_{np})\},$$
$$d_2'' = \{(b_l, c_{il}), (a_k, c_{km}), (c_{kl}, c_{np})\};$$

$$d_1 = \{(a_i, b_m), (b_l, a_k), (c_{il}, c_{km})\}, \quad d_1' = \{(a_i, c_{im}), (b_l', c_{kl}), (c_{il}\, c_{np})\},$$
$$d_1'' = \{(b_m, c_{im}), (a_k, c_{kl}), (c_{km}, c_{np})\}.$$

Im ganzen hat man 15 Gerade, die sich zusammensetzen aus 9 Geraden der F_3, nämlich aus den 4 Geraden des Vierecks, aus den 4 Restgeraden $(c_{il}, c_{km}; c_{im}, c_{kl})$ und der weiteren c_{np}, andererseits aus den $2 \cdot 3$ Verbindungsgeraden zugeordneter Ecken als Treffpunktegeraden. Ferner hat man 20 Punkte, einmal 18 Treffpunkte zweier Geraden der F_3 mit einer Treffpunktgeraden, sodann 2 Inzidenzpunkte von 3 Treffpunktegeraden. Es ist bemerkenswert, daß trotz der

Deutet man die λ als Koordinaten eines Punktes P in einer festen Hilfsebene E, so stellt in ihr $\sum u_i f_i = 0$ eine lineare ∞^3-Schar (Gebüsch) von c_3 mit sechs Grundpunkten A_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ dar (und umgekehrt), d. h. jede der c_3 ist das Bild eines ebenen Schnittes $\sum u_i x_i = 0$ der F_3.

Jedem Punkt P der Ebene E, als siebentem Grundpunkt eines c_3-Netzes, entspricht ein Punkt Q der F_3 als Grundpunkt eines Ebenenbündels, und vice versa. Die A_i sind die „*Fundamentalpunkte*“ der

---

verschiedenen Natur der 15 Geraden und 20 Punkte das ganze eine Konfiguration $\{15_4, 20_3\}$ bildet.

Aus der zum Viereck gehörigen Doppelsechs lassen sich gerade noch zwei weitere windschiefe Vierecke $\{(b_i, b_k), (a_n, a_p)\}$, $\{(a_l, a_m), (b_n, b_p)\}$ je mit derselben Konfiguration bilden; in dem System aller drei Konfigurationen sind dann sämtliche 27 Geraden der F_3 enthalten.

Über die *E. Pascal*schen Konfigurationen s. Nr. **22**.

35a) Die umgekehrte Aufgabe, bei gegebener Abbildung, d. i. bekannter Lage der sechs Fundamentalpunkte A_i, die Gleichung der zugehörigen F_3 zu ermitteln, erledigt *A. B. Coble*, John Hopkins Univ. Circ. 1911, p. 59, auf invariantentheoretischer Grundlage [vgl. auch *F. Schottky*, J. f. Math. 146 (1916), p. 129, wo ähnliche Eliminationsaufgaben auf Grund algebraischer Beziehungen zwischen Thetafunktionen behandelt werden.]

In der *Gauß*schen Ebene sind die A_i repräsentiert durch sechs Werte ζ_i einer komplexen Variablen ζ, die Wurzeln einer Gleichung 6. Grades. Mittels der Differenzen $\zeta_r - \zeta_s$ werden gewisse Ausdrücke B_i gebildet, und innerhalb dieser jene Differenzen dem *Clebsch*schen Übertragungsprinzip (s. Nr. **12**) unterworfen. Damit gehen die B_i über in Linearformen der x, und die Gleichung der F_3 resultiert in der *Cremona*schen Hexaederform $\sum C_i^3 = 0$ (s. Nr. **12**).

Auf elementarem Wege gelangt *W. Fr. Meyer* zum Ziele, Deutsche Math.-Ver. 36 (1927), p. 228. Das Koordinatendreieck wird so gelegt, daß jede Seite ein Paar der A trägt; die Gleichungen der 15 Geraden c_{ik}, sowie der 6 Kegelschnitte B_i lassen sich leicht aufstellen. Mittels ihrer werden vier geeignete Individuen des c_3-Gebüsches (durch die A) konstruiert. Die Elimination der Parameter führt dann direkt zur Gleichung der F_3 als dreireihiger Determinante (gleich Null), und damit zur *Graßmann*schen Erzeugung. In den Sonderfällen, wo die F_3 einen oder mehrere d_2 erhält (s. Note 36), findet die Aufgabe ihre direkte Erledigung auf Grund einer einfachen Identität. Auf derselben Grundlage werden aber auch, ebenda 37 (1928), p. 74, die anschließenden Aufgaben behandelt, die Gleichungen der 45 Tritangentialebenen und der 27 Geraden der F_3 rational und explizite in den Koordinaten der A in einfacher, übersichtlicher Gestalt darzustellen. Das Nämliche gilt für die 28 Doppeltangenten der durch die *Geiser*sche Projektion (s. Nr. **16**) aus der F_3 hervorgehenden c_4. Diese Gleichungen können weiterhin dazu dienen, nicht nur bekannte Lagenbeziehungen jener Gebilde rechnerisch zu bestätigen, sondern auch zu neuen zu gelangen. — Es sei auch noch hingewiesen auf *L. E. Dickson*, Quart. J. 33 (1901), p. 145; Amer. Math. Soc. Proc. (2) 8 (1901), p. 63, wo die Konfiguration der 27 g und 45 E durch eine einzige kubische Form repräsentiert wird. Dabei liegt zugrunde eine einfache endliche kont. Gruppe linearer homogener Substitutionen mit 78 Parametern.

„*Abbildung*“[35b])[35c]), für die die Eindeutigkeit des Entsprechens aufhört; das Bild irgendeines Punktes der Geraden a_i — wo die a_i eine Sechs

35b) Sind so nach *Clebsch* und *Graßmann* die Punkte einer F_3 und einer Ebene (1, 1)-deutig aufeinander bezogen, so lassen sich mit Hilfe von (1, 1)-deutigen („*Cremona*schen“) Transformationen des Raumes aus einer F_3 Flächen höherer Ordnung ableiten, wie dies *Cremona, Noether, Sturm, Montesano, M. Pieri* u. a. ausgeführt haben, s. Art. III C 6b, *G. Castelnuovo* u. *F. Enriques*, Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus.

Auf eine bemerkenswerte *Cremona*sche Transformation des Raumes, die durch vier windschiefe Gerade bestimmt ist, und mit der Theorie der F_3 und C_3 eng zusammenhängt, sei besonders hingewiesen: s. *E. K. Wakeford*, London Math. Soc. Proc. (2) 21 (1921), p. 98; *H. F. Baker*, ebenda p. 114. Durch die vier Geraden geht ein Gebüsch von F_3, die zugleich deren beide Transversalen enthalten, so daß sich irgend zwei F_3 des Gebüsches noch in einer Rest-C_3 schneiden. Ist die Gleichung des F_3-Gebüsches $\sum v_i F_3^{(i)}(x) = 0$, so deute man vermöge der Gleichungen $\varrho y_i = F_3^{(i)}(x)$ die $F_3^{(i)}(x)$ als Punkte (y) eines zweiten Raumes. Dann ist die so festgelegte Beziehung zwischen beiden Räumen umkehrbar: es ergibt sich $\sigma x_i = G_3^{(i)}(y)$, wo das Gebüsch von G: $\sum u_i G_3^{(i)}(y) = 0$ wiederum ein solches von Flächen 3. Ordnung durch vier feste Gerade ist. Man erkennt das, wenn man das Gebüsch $\{F_3^{(i)}\}$ aus vier geeigneten Grundindividuen zusammensetzt. Zu dem Behuf lege man durch zwei der Geraden zwei F_2, F und G, die noch je die dritte resp. vierte Gerade enthalten. Wählt man die beiden letzteren Geraden als Koordinatenkanten, dann gestattet die obige Transformation die kanonische Darstellung $\varrho y_i = F(x)x_i$, $\varrho y_k = F(x)x_k$, $\varrho y_l = G(x)x_l$, $\varrho x_m = G(x)x_m$, und ihre Umkehrung die durchaus analoge: $\sigma x_i = F'(y)y_i$, $\sigma x_k = F'(y)y_k$, $\sigma x_l = G'(y)y_l$, $\sigma x_m = G'(y)y_m$. Somit entspricht jeweils den Ebenen des einen Raumes ein Gebüsch von F_3 mit vier Grundgeraden des anderen Raumes. Daraus folgt, daß die Geraden je des einen Raumes übergehen in die ∞^4 C_4 des anderen Raumes, die dessen vier Grundgerade zu Sekanten besitzen.

In jedem der beiden Räume haben je zwei der in Rede stehenden C_3 noch sechs Restsehnen gemein; diese Figur geht über in die sechs C_3, die sechs beliebige windschiefe Gerade als Sehnen haben. (Über die nähere Bestimmung dieser sechs C_3 s. *W. Franz Meyer*, Apolarität, 1883, Abschn. III.)

Durch irgend zwei C_3 je einer Schar geht im allgemeinen keine F_3, wohl aber eine einzige solche, wenn die beiden C_3 noch einen Punkt gemein haben. Im besonderen kann man die beiden Räume sowie ihre vier Grundgeraden zusammenfallen lassen. Denkt man sich umgekehrt irgendeine partikuläre (eigentliche) F_3 eines Gebüsches durch vier Gerade, und legt diese F_3 als gegeben zugrunde, so kann man diese Geraden etwa als b_i, b_k, b_l, b_m wählen. Vermöge der *Clebsch*schen Abbildung entsprechen ihnen die vier Kegelschnitte B_i, B_k, B_l, B_m. Ergänzt man diese mittels einer willkürlichen Geraden c_1 zu einer c_9, die in den A (mindestens) d_3 besitzt, so erkennt man, wie dem Netz der c_1 eine ∞^2 Schar von C_3 auf der F_3 entspricht, die aus ihr durch ein die vier obigen Geraden enthaltendes Netz von F_3' ausgeschnitten werden. Durch lineare Zusammensetzung dieses Netzes mit der F_3 geht wieder das ursprüngliche Gebüsch hervor.

Es sei noch erwähnt, daß mit der obigen Figur des F_3-Gebüsches die von sieben windschiefen Geraden verknüpft ist, die einer F_4 angehören. Damit

bilden — ist eine Richtung (Linienelement) durch A_i. Einer Geraden b_i der konjugierten Sechs (Nr. **10**) korrespondiert der Kegelschnitt B_i, der durch die A exkl. A_i geht.

Die Bilder der 15 übrigen Geraden auf der F_3 sind die 15 Verbindungsgeraden der Punktepaare A_i, A_k, die ebenfalls mit c_{ik} bezeichnet seien.

Allgemein gilt: „Jede c_{3n} der Ebene E mit (wenigstens) n-fachen Punkten d_n in den A korrespondiert dem Schnitt C_{3n} der F_3 mit einer F_n, und vice versa."

So bilden die 15 Geraden c_{ik} nebst den sechs Kegelschnitten B_i in E eine $c_{3\cdot 9}$ mit d_{10} in den A; mithin werden die 27 Geraden der F_3 durch eine (Schar) von F_9 ausgeschnitten, wie schon *Cayley* und *Clebsch* (Nr. **2**) früher gezeigt hatten. Aber auch die 45 „Ebenen", die 36 Doppelsechsen und die 120 resp. 540 Paare konjugierter Trieder resp. Tetraeder (Nrn. **2**, **8**, **10**) gestatten jetzt eine deutliche Übersicht, die auch den inneren Zusammenhang hervortreten läßt.

Von den 45 „Ebenen" sind 30 vom Typus (a_i, b_k, c_{ik}) und 15 vom Typus (c_{ik}, c_{lm}, c_{np}).

Die 36 Doppelsechsen zerlegen sich in: 1. die eine, bei der Abbildung ausgezeichnete: (a_i, b_i); 2. die 15 vom Typus: $(a_i, b_i, c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{kp})$, $(a_k, b_k, c_{il}, c_{im}, c_{in}, c_{ip})$; 3. die 20 vom Typus: $(a_i, a_k, a_l, c_{mn}, c_{mp}, c_{np})$, $(b_m, b_n, b_p, c_{ik}, c_{kl}, c_{li})$.[35d])

Werden die 120 Triederpaare je durch ihre $3 \cdot 3 = 9$ Schnittgeraden angegeben, so hat man: 1) $2 \cdot 10 = 20$ Paare vom Typus: $(a_i, a_k, a_l;\ b_i, b_k, b_l;\ c_{kl}, c_{il}, c_{ik})$; 2) 10 Paare vom Typus: $(c_{im}, c_{in}, c_{ip};\ c_{km}, c_{kn}, c_{kp};\ c_{lm}, c_{ln}, c_{lp})$; 3) $6 \cdot 15 = 90$ Paare vom Typus: $(a_i, a_k, c_{np};\ c_{km}, c_{im}, b_l;\ c_{kl}, c_{il}, b_m)$. Nach *Steiner*, l. c. p. 655, gehören zu jedem

sieben windschiefe Gerade auf einer F_4 liegen, ist eine einzige Bedingung notwendig und hinreichend, die *Cayley*, London Math. Soc. Proc. 3 (1871), p. 19, 198 genauer untersucht hat.

35c) Bezüglich der transzendenten Darstellung der Punkte einer F_3 durch mehrfach periodische resp. Thetafunktionen, wie sie *G. Darboux*, *E. Picard*, *G. Humbert*, *E. Traynard* u. a. verfolgt haben, sei auf das Werk von *H. F. Baker*, Multiple periodic functions, Cambridge 1907, verwiesen, sowie auf *F. Schottky*, Berl. Ber. 1914, p. 966; J. f. Math. 146 (1916), p. 129.

35d) Für manche Anwendungen bedarf man auch der Anzahlen der verschiedenen windschiefen Fünfen, Vieren, Dreien und Zweien, die sich aus den 27 g bilden lassen. Deren leicht aufstellbare Schemata ergeben folgendes. Von „uneigentlichen" Fünfen (s. Nr. **10**), mit nur einer Transversale, gibt es 432, von „eigentlichen", mit zwei Transversalen, 270; von Vieren 980, von Zweien 216. Eine Drei ergänzt sich vermöge ihrer drei Transversalen zu einer „Doppeldrei"; solcher existieren 360. Über eine Anwendung der letzteren auf die Gruppentheorie der F_3 s. Nr. **22**.

Paare konjugierter Trieder zwei andere, so daß die $3 \cdot 9$ Schnittgeraden die 27 Geraden der F_3 sind; solcher „*Ternen*“ gibt es also 40.

Endlich lassen sich auch die $36 \cdot 15 = 540$ Paare konjugierter Tetraeder (Nr. **10**) leicht kennzeichnen. Schließt man von den 27 Geraden irgendeine Doppelsechs, z. B. (a_i, b_i) aus, so verbleiben noch 15 Gerade (c_{ik}) (s. auch Nr. **18**). Spaltet man von diesen wiederum eines der 15 Tripel ab, die eine Ebene T bilden, z. B. c_{il}, c_{kn}, c_{mp}, so bilden die zwölf übrigen auf nur eine Weise die Durchschnittsachsen nicht zugeordneter Ebenen (x_i, y_k) zweier konjugierter Tetraeder, nach dem Determinantenschema: $\{\cdot, c_{ik}, c_{lm}, c_{np};\ c_{lm}, \cdot, c_{kp}, c_{im};\ c_{ip}, c_{mn}, \cdot, c_{ki};\ c_{km}, c_{ip}, c_{in}, \cdot\}$. Hier deuten die vier Punkte die Schnittlinien entsprechender Ebenen (x_i, y_i) an, die nicht auf der F_3 liegen, wohl aber auf einer neunten Ebene (v) (s. Nr. **10**). Aus den 12 Geraden lassen sich gerade sechs windschiefe Quadrupel bilden, vom Typus $(c_{ik}, c_{im}, c_{in}, c_{ip})$.

Die Kegelschnitte C_2 auf der F_3 sind die Restschnitte der Ebenenbüschel durch die 27 Geraden a_i, b_i, c_{ik}. Ihnen entsprechen in der Ebene E Kurvenbüschel, und zwar der Reihe nach, der kubischen rationalen Kurven r_3 mit d_2 in A_i, und einfach gehend durch die fünf übrigen A; der Geraden durch A_i; endlich der c_2 durch irgend vier der A.

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft, wie eine ebene C_3 auf der F_3 resp. ihre Bildkurve c_3 zerfallen kann.

Von besonderem Interesse sind die verschiedenen zerfallenden Schnittkurven C_6 der F_3 mit einer eigentlichen (veränderlichen) F_2. Als Kontrolle dient mit Vorteil die umgekehrte Auffassung, wonach jene C_6 erscheinen als Schnitte einer festen F_2 mit einer (veränderlichen) F_3. Dabei wird die F_2 vermöge stereographischer Projektion auf eine Hilfsebene H abgebildet, mit zwei Fundamentalpunkten A, B, den Bildern der beiden Scharen von Erzeugenden der F_2; irgendeiner $C_6(F_2, F_3)$ entspricht dann eine c_6 mit d_3 in A und B.

Wir stellen die wesentlichsten Ergebnisse der ersteren Abbildung in einer Tabelle zusammen, wobei die Zeichen C_r, c_s $(r, s < 6)$ immer nichtzerfallende Kurven bedeuten; bei der einzelnen Abbildung genüge je die Anführung eines Typus.

Das Bild der allgemeinen (nichtzerfallenden[35e]) $C_6(F_2, F_3)$ $(p = 4)$ in E ist eine nichtzerfallende c_6 mit d_2 in den 6 A $(p = 4)$.

35 e) Die nichtzerfallenden $C_6 = (F_3, F_2)$ $(p = 4)$ hat *Clebsch*, J. f. Math. 63 (1864), p. 189 mit Hilfe der *Abel*schen Funktionen eingehend untersucht und besonders hinsichtlich ihrer dreimal berührenden Ebenen und sechsmal berührenden F_2 eine große Anzahl von Abzählungsergebnissen ermittelt.

Synthetisch hat eine Reihe dieser Ergebnisse *W. P. Milne* bestätigt, London Math. Soc. Proc. (2) 21 (1922), p. 375. Andererseits rühren von *E. Pascal* verschiedene Ergänzungen her, Lomb. Ist. Rend. (2) 38 (1905), p. 579. Von den nicht-

Je nach der Vielfachheit des Zerfallens der C_6 werde in Klassen eingeteilt:

---

zerfallenden C_6 auf einer F_3, die nicht durch eine F_2, sondern erst durch F_3' ausgeschnitten werden, sei besonders auf die elliptischen ($p = 1$) hingewiesen, durch die ein Büschel von F_3 geht, s. *Em. Weyr,* Wien Ber. 98 (1890), p. 98, 952; ebenda 100 (1891), p. 157 [s. auch die Vorarbeiten über elliptische C_5, ebenda 90 (1884), p. 1036; 92 (1886), p. 498; 84 (1888), p. 592], sowie *F. London,* Math. Ann. 45 (1894), p. 545, der u. a. die 18 dreimal berührenden Ebenen in 6 „assoziierte" Tripel zerlegt. Endlich seien auch noch die R_6 erwähnt, durch die nur eine einzige F_3 geht. Solche R_6 studiert *E. Ciani*, Lomb. Ist. Rend. (2) 39 (1906), p. 359, mit ∞^1 dreimal berührenden Ebenen und einer Gruppe automorpher Kollineationen, sowie Palermo Rend. 21 (1906), p. 322; 22 (1906), p. 287 (Schnitte einer F_3 mit Kegeln 2. Ordnung; abgesehen von diesem Falle gibt es keine irreduzible C mit ∞^1 dreimal berührenden Ebenen; vgl. Art. III C 9, *K. Rohn* und *L. Berzolari,* Allg. Raumkurven und abwickelbare Flächen, Nrn. **61, 66—69**).

Die C_6 (nebst den C_5) hat *A. Brill,* Math. Ann. 64 (1907), p. 239; Palermo Rend. 25 (1907), p. 188, durch einzige Gleichung dargestellt. Es geschieht dies auf Grund einer allgemeinen Methode, s. *A. Brill,* Gött. Nachr. 1901, p. 156, wonach eine Raumkurve C dargestellt wird vermöge der Gleichung der ∞^1 Projektionskegel, deren Spitzen eine feste Gerade durchlaufen. Die Diskriminante jener Gleichung wird dann auf ihre Reduzibilität untersucht. Eine weitere Anwendung auf C_4 und R_4 gibt *A. Crespi,* Giorn. di mat. 55 (1916), p. 48; vgl. Art. III C 9, Nr. 5.

Übrigens lassen sich Raumkurven noch auf eine andere Art durch eine einzige Gleichung darstellen, nämlich des Komplexes der sie treffenden Geraden. *W. Franz Meyer* hat diese Methode vermöge Resultantenbildungen auf R_n, bei deren Parameterdarstellung, angewendet, s. „Apolarität" (1883), Abschn. 3. Diese Methode läßt sich auch verwenden, wenn eine Raumkurve C als Schnitt einer F_m und F_n vorliegt. Man bedient sich dazu am besten des *Clebsch*schen Übertragungsprinzips (s. Nr. **12**). Schneidet man beide Flächen nach der *Joachimsthal*schen Methode mit einer Geraden g, so erhält man zwei binäre Gleichungen $f_m \equiv a_x^m = 0$, $f_n \equiv b_x^n = 0$. Denkt man sich deren Resultante R als Aggregat von Produkten aus Klammerfaktoren (ab) gebildet, so hat man nur jeden solchen Faktor durch eine vierreihige Determinante vom Typus $(abuv)$ zu ersetzen, wo die $(uv)_{is} = \pi_{ik}$ die Achsenkoordinaten von g sind. Dann liefert die Gleichung $R(\pi) = 0$ die gesuchte Komplexgleichung. Zerfällt im besonderen C in Teilkurven C_1, C_2, ..., so auch R in Teilresultanten R_1, R_2, ... Für geometrische Zwecke ist es oft vorteilhafter, von einer realen Darstellung von R als Aggregat von Invarianten $R = \sum J$ auszugehen. Kennt man weiter die geometrische Bedeutung des Verschwindens der einzelnen J, so erscheint die Komplexgleichung der Kurve C in der Gestalt $\sum \overline{J} = 0$, wo jeweils $\overline{J} = 0$ die Gleichung des Komplexes der Geraden g ist, die die beiden Flächen F, G in Punktgruppen mit der Eigenschaft $J = 0$ schneiden. So ergibt sich z. B. die Gleichung einer $C_4(F_2, G_2)$ in der Form: $C_4 \equiv \Phi\Psi - \mathsf{H}^2 = 0$, wo $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ die beiden Tangentenkomplexe von F_2, G_2 sind, und $\mathsf{H} = 0$ der harmonische Komplex, dessen Geraden F_2, G_2 in harmonischen Punktepaaren treffen.

Ähnlich ergibt sich die Gleichung einer $C_9(F_3, G_3)$ in der Form: $C_9 \equiv I - \mathsf{H}^3 = 0$; hier ist $\mathsf{H} = 0$ der Komplex der Geraden, die F_3, G_3 in konjugierten

A. Paare von Teilkurven der C_6.

a) $C_5(p=2)+C_1$.

Bilder: c_{ik} und c_5 $(p=2)$ durch A_i, A_k, mit d_2 in den vier übrigen A.

b) $C_4(p=1)+C_2$.

Bilder: c_2 durch A_i, A_k, A_l, A_m und $c_4\,(p=1)$ durch die nämlichen A, mit d_2 in A_n, A_p.

c) C_3+C_3' (konjugiert).

Wegen der besonderen Bedeutung dieser C_3-Paare (s. Nr. **19**) seien hier die Bildertypen vollständig angegeben. Man hat je zwei konjugierte Netze von Kurven:

α) c_1, und rationale r_5 mit d_2 in allen A;

β) c_2 durch A_i, A_k, A_l, und rationale r_4 durch A_i, A_k, A_l, mit d_2 in A_m, A_n, A_p;

γ) rationale r_3 mit d_2 in A_i, einfach durch A_k, A_l, A_m, A_n, und r_3 mit d_2 in A_p, einfach durch die nämlichen $4A$.

NB. Bei der zweiten Abbildung (der F_2 auf H) zeigt sich, daß noch ein spezifisch imaginärer Typus auftritt. Die F_2 ist keine Regelfläche, A und B also konjugiert imaginär.

Man hat eine imaginäre c_3 mit d_2 in A, d_1 in B, und eine konjugiert imaginäre c_3' mit d_2 in B, d_1 in A. Ihnen entspricht auf der F_3, die überhaupt keine reelle C_3 trägt, ein Paar konjugiert imaginärer C_3. Dieser Fall entzieht sich der *Clebsch*schen Abbildung (s. u.).

B. Drei Teilkurven.

a) $C_4+C_1+C_1'$.

Es sind zwei Fälle a_1) und a_2) zu unterscheiden, je nachdem C_1 und C_1' windschief oder aber inzident sind.

a_1) $C_4(p=0)$, C_1 windschief zu C_1'.

Bilder: Eine r_4 durch A_k, A_l, mit d_2 in A_m, A_n, A_p, nebst c_{ik} und c_{il}.

a_2) $C_4(p=1)$, C_1 inzident mit C_1'.

Bilder: Eine $c_4(p=1)$ durch A_i, A_k, A_l, A_m, mit d_2 in A_n, A_p, nebst c_{ik} und c_{lm}.

b) $C_3+C_2+C_1$.

Bilder: c_1, eine r_3 durch A_i, A_k, A_l, A_m, A_n, mit d_2 in A_p, und die c_2 $(=B_p)$ durch A_i, A_k, A_l, A_m, A_n.

Punktetripeln treffen, und $I=0$ der Komplex der Geraden g, für die das Quadrupel der Punkte, in denen g von einer Fläche des Büschels (F_3, G_3) berührt wird, ein harmonisches ist. [Über diese Quadrupel von Berührungspunkten s. *H. v. Os*, Amst. Akad. Versl. 25 (1917), p. 936.]

c) $C_2 + C_2' + C_2''$.

Bilder: c_2 durch A_i, A_k, A_l, A_m; c_2' durch A_i, A_k, A_n, A_p; c_2'' durch A_l, A_m, A_n, A_p.

C. Vier Teilkurven.

a) $C_3 + C_1 + C_1' + C_1''$.

Die drei Geraden können nicht in einer Ebene liegen sonst zerfiele die F_2 in zwei Ebenen; sie können aber auch nicht alle windschief sein, sonst zerfiele auch die C_3 in drei (windschiefe) Gerade, d. i. der Fall E (s. u.). Sei also etwa C_1 windschief zu C_1', beide getroffen von C_1''.

Bilder: c_2 $(= B_i)$ durch A_k, A_l, A_m, A_n, A_p;
c_2' $(= B_k)$ durch A_i, A_l, A_m, A_n, A_p,
nebst c_{ik} und einer c_1.

b) $C_2 + C_2' + C_1 + C_1'$.

C_1 und C_1' müssen inzident sein.

Bilder: c_2 durch A_i, A_k, A_n, A_p;
c_2' durch A_l, A_m, A_n, A_p,
nebst c_{ik} und c_{lm}.

D. Fünf Teilkurven.

$C_2 + C_1 + C_1' + C_1'' + C_1'''$.

Die vier Geraden zerfallen in zwei Paare windschiefer, während jede Gerade des einen Paares jede Gerade des anderen trifft.

Bilder: c_2 durch A_i, A_k, A_l, A_m,
nebst c_{in}, c_{kn} und c_{ip}, c_{np}.

E. Sechs Gerade.

Die sechs Geraden zerlegen sich in zwei windschiefe Tripel, die zueinander inzident sind; durch das eine der beiden Tripel ist das andere mitbestimmt (s. auch Nr. 2 bei *Salmon*).

Bilder: c_{ik}, c_{il}, c_{kl} und c_{mn}, c_{mp}, c_{np}.

Hieran schließe sich die Realitätsdiskussion der $27\,g$ und $45\,\mathsf{T}$ (s. Nr. 6). Da die Gleichungen der c_3 des Gebüsches in E reelle Koeffizienten haben, können für singularitätenfreie F_3 nur vier verschiedene Fälle hinsichtlich der Realität der sechs Fundamentalpunkte A eintreten: 1. Alle sechs A sind reell; 2. vier der A sind reell, die beiden anderen konjugiert imaginär; 3. zwei der A sind reell, die vier übrigen bilden je ein Paar konjugiert imaginärer; 4. drei Paare konjugiert imaginärer A.

Es folgt die Einzeldiskussion.

Fall 1: [27; 45.] Alle $27\,g$ und $45\,\mathsf{T}$ sind reell.

Fall 2: [15; 15.] Seien A_i, A_k, A_l, A_m reell, A_n und A_p konjugiert imaginär.

Man hat die 15 reellen g: (a_i, a_k, a_l, a_m), (b_i, b_k, b_l, b_m), $(c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{kl}, c_{km}, c_{np})$ und c_{ik}.

Die 12 übrigen g zerlegen sich in die sechs Paare konjugiert imaginärer: c_{in}, c_{ip}; c_{kn}, c_{kp}; c_{ln}, c_{lp}; c_{mn}, c_{mp}; a_n, a_p; b_n, b_p.

Die 15 reellen T tragen je drei reelle g und bestehen aus den sechs Paaren: (a_i, b_k, c_{ik}), (a_k, b_i, c_{ik}); . . ., (a_l, b_m, c_{lm}), (a_m, b_l, c_{lm}), nebst den drei weiteren (c_{np}, c_{ik}, c_{lm}), (c_{np}, c_{il}, c_{km}), (c_{np}, c_{im}, c_{kl}).

Fall 3: [7; 5.] Seien A_i, A_k reell, A_l und A_m, A_n und A_p konjugiert imaginär.

Die sieben reellen g sind: a_i, a_k; b_i, b_k; c_{ik}, c_{lm}, c_{np}; die 20 übrigen bestehen aus den zehn Paaren konjugiert imaginärer: c_{il}, c_{im}; c_{in}, c_{ip}; c_{kl}, c_{km}; c_{kn}, c_{kp}; a_l, a_m; a_n, a_p; b_l, b_m; b_n, b_p; c_{ln}, c_{mp}; c_{lp}, c_{mn}.

Die fünf reellen T zerlegen sich in zwei Arten von je drei resp. zwei Individuen, je nachdem sie α) drei reelle g, oder β) nur eine reelle g enthalten:

α) (a_i, b_k, c_{ik}), (a_k, b_i, c_{ik}), (c_{ik}, c_{lm}, c_{np});

β) (c_{ik}, c_{ln}, c_{mp}), (c_{ik}, c_{lp}, c_{mn}).

Fall 4: [3; 7.] Seien A_i und A_k, A_l und A_m, A_n und A_p je konjugiert imaginär.

Die drei reellen g sind: c_{ik}, c_{lm}, c_{np}, die auch die einzige T mit drei reellen Geraden bilden. Außer dieser gibt es drei Paare reeller T mit je nur einer einzigen reellen Geraden: (c_{ik}, c_{ln}, c_{mp}), (c_{ik}, c_{lp}, c_{mn}); (c_{lm}, c_{in}, c_{kp}), (c_{lm}, c_{ip}, c_{kn}); (c_{np}, c_{il}, c_{km}), (c_{np}, c_{im}, c_{kl}).

Diese vier Fälle entsprechen den in Nr. 6 angegebenen *Schläfli*schen Realitätstypen 1., 2., 3., und 5. Der dortige vierte Typus [3; 13], mit drei reellen g, durch deren jede vier reelle T mit konjugiert imaginären g gehen, fällt bei der *Clebsch*schen Abbildung aus; der innere Grund ist, daß die zugehörige F_3 keine reelle C_3 trägt (s. unten, und Nr. 15).

Für F_3 mit Singularitäten hat *J. Diekmann*[36]) die Abbildung weiter verfolgt.

36) *Diekmann*, Math. Ann. 4 (1871), p. 442. Weitere Ausführungen und Ergänzungen, auch für Fälle von d_2, liefern: *A. Korndörffer*, Pr. Neumünster 1877; *L. Cremona*, Edinb. Trans. 32 (1885), p. 599; *H. Schoute*, Amst. Versl. 15 (1907), p. 570, wo im besonderen das Verhalten der parabolischen Kurve beim Auftreten von d_2 verfolgt wird. Allgemein untersucht eine F_n in der Nachbarschaft eines d_2 *K. Rohn*, Math. Ann. 22 (1883), p. 134.

Beim Auftreten von d_2 der F_3 erfährt die Figur der sechs Fundamentalpunkte A mit ihren Geraden c und Kegelschnitten B gewisse Modifikationen.

Das Auftreten *eines* (konischen) d_2 entspricht der Bedingung, daß die A

Die an sich schematische Abbildung der F_3 auf eine Hilfsebene E hat *Clebsch*[37]) bei spezieller Wahl der Projektionsebene, durch *Steiners „schiefe Projektion"* (Werke 1, bes. p. 408), realisiert.

Diese besteht zunächst darin, daß man, nach Annahme zweier windschiefer „Leitgeraden" l_1, l_2, jedem Raumpunkte Q die durch ihn gehende Transversale p von l_1 und l_2 als *„Projektionsstrahl"* zuordnet.

Dabei sind die Leitgeraden als *„Fundamentalgerade"* anzusehen, insofern zu jedem Punkte, etwa von l_1, noch das ganze Büschel von Projektionsstrahlen gehört, die ihn mit den Punkten von l_2 verbinden.

Ist C_n eine vorgelegte Raumkurve, so ordnet sich den Punkten von C_n eine Regelfläche der Ordnung $2n$ zu, die sich ebenso oft um eine Einheit vermindert, als C_n eine der beiden Leitgeraden trifft.

Fängt man nunmehr die Projektionsstrahlen p mit einer *„Projektionsebene"* Π auf, die l_1 und l_2 in einer festen Transversale t begegne, so sind die Raumpunkte Q auf die Punkte P, als Spuren der Projektionsstrahlen p in Π, bezogen.

Einer Raumkurve C_n entspricht jetzt eine c_{2n} in Π, deren Ordnung sich aber auch immer dann um Eins vermindert, wenn C_n die Transversale t trifft; denn jedem Punkte Q von t entspricht eben t selbst als Projektionsstrahl.

Beschränkt man sich weiter auf eine (allgemeine) F_3, als Ort von Punkten Q, derart, daß die beiden Leitgeraden der F_3 angehören, so ist damit die F_3 auf die Ebene Π eineindeutig abgebildet.

Ohne uns bei dem Fall einer beliebigen Ebene[37]) Π aufzuhalten,

---

einem (nichtzerfallenden) Kegelschnitte B angehören. Für manche Zwecke empfiehlt es sich jedoch, vermöge einer quadratischen Verwandtschaft T_2, deren drei Fundamentalpunkte in drei der A fallen — wodurch das Gebüsch der c_3 (durch alle A) wieder in ein solches übergeht — die Figur überzuführen in eine gleichwertige, bei der drei der A inzident sind.

Tritt die Besonderheit eines uniplanaren d_2 ein, so zerfällt der Kegelschnitt B in ein Paar von Geraden, deren jede drei der A trägt.

Im Fall von zwei d_2 liegen zwei Gerade vor, derart, daß ihr Schnittpunkt ein A ist, und jede derselben noch zwei weitere A trägt, während der letzte außerhalb liegt.

Im Falle von drei d_2 hat man ein Dreieck, dessen Ecken drei der A sind, während jede Seite noch einen weiteren A trägt.

Endlich bei vier d_2 (s. Nr. 13) bilden die A die Ecken eines vollständigen Vierseits. Aus dieser Figur läßt sich die Existenz nebst der gegenseitigen Lage (und zu den d_2) der jeweils noch übrigen Geraden und Tritangentialebenen der F_3 ablesen.

37) *Clebsch,* Math. Ann. 5 (1872), p. 419. Läßt man die Projektionsebene Π beliebig, so treten einige Modifikationen auf, die die Einfachheit des Ganzen beeinträchtigen. Es treffe Π die Geraden b_i, b_k in A_i, A_k, und die ausgezeichnete Transversale c_{ik} von b_i, b_k treffe Π in A_r, während die Spuren der vier

wählen wir gleich mit *Clebsch* die Transversale t als eine weitere Gerade der F_3, also als irgendeine (reelle) der fünf Transversalen von l_1, l_2, die auf der F_3 liegen.

Damit auch die Bezeichnung dem früheren Schema (innerhalb der Hilfsebene E) angepaßt sei, seien b_i und b_k die beiden Leitgeraden, c_{ik} die Transversale t, die b_i und b_k in A_i und A_k treffe, so daß a_l, a_m, a_n, a_p die vier weiteren Transversalen sind mit den Spurpunkten A_l, A_m, A_n, A_p in Π.

Dann erweisen sich zunächst diese vier Punkte als Fundamentalpunkte der Abbildung. Aber auch A_i und A_k sind solche. Denn da z. B. a_k die Restgerade der Ebene (b_i, c_{ik}) ist, so projiziert sich jeder Punkt von a_k in den Punkt A_k auf Π, und analog ist es mit a_i und A_i.

Noch vier weitere Geraden treffen b_i allein, nämlich $c_{il}, c_{im}, c_{in}, c_{ip}$, und ebenso vier solche, die b_k allein treffen, $c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{kp}$; diese acht Geraden c_{rs} projizieren sich ersichtlich in die acht gleichbezeichneten Geraden $c_{rs} = (A_r, A_s)$. Weiter gibt es noch zehn Gerade g der F_3, die weder b_i noch b_k treffen; diese zerlegen sich in zwei Klassen, a) und b), je nachdem sie c_{ik} treffen oder nicht: a) $c_{lm}, c_{ln}, c_{lp}, c_{mn}, c_{mp}, c_{np}$; b) b_l, b_m, b_n, b_p.

Hier gehen wiederum die ersteren in die sechs gleichbezeichneten Geraden in Π über, die letzteren dagegen in die vier entsprechenden Kegelschnitte $B_i = (A_i, A_k, A_m, A_n, A_p)$ usf.

Es erübrigt demnach noch, die Projektion der beiden Leitgeraden b_i, b_k selbst zu betrachten, die sich eigenartig vollzieht, insofern die ursprüngliche Unbestimmtheit der Projektion bei der allgemeinen Raumtransformation (s. oben) in bestimmter Weise aufgehoben wird; da jeder Punkt S_i, etwa von b_i, nicht nur an sich in Betracht zu ziehen ist, sondern zugleich mit allen seinen Nachbarpunkten auf F_3.

Diese Nachbarpunkte gehören zugleich der Berührungsebene T_i von F_3 in S_i an, d. i. aber einer Ebene durch b_i, die aus der F_3 eine Rest-C_2 ausschneidet, mit zweitem Treffpunkt S_i' auf b_i: die Gesamtheit dieser Punktepaare $(S_i S_i')$ bildet eine Involution auf b_i.

---

weiteren Transversalen a_l, a_m, a_n, a_p in Π A_l', A_m', A_n', A_p' seien. Um die so entstehende schiefe Projektion der F_3 auf die *Clebsch*sche zurückzuführen, bedarf es noch einer quadratischen, eineindeutigen Transformation T_2, mit dem Fundamentaldreieck A_i, A_k, A_r, die die vier Punkte A_l', A_m', A_n', A_p' resp. in A_l, A_m, A_n, A_p überführe.

Dabei ist wieder beachtenswert das Verhalten der beiden Leitgeraden b_i, b_k. Wie im Texte bilden sich die Involutionspaare S_i, S_i' auf b_i ab auf Punktepaare P_i, P_i', deren Verbindungsgeraden das Büschel (A_i) in Π bilden; diese Punktepaare P_i, P_i' erfüllen aber jetzt keinen Kegelschnitt, sondern eine r_3 durch A_i, mit d_2 in A_k, und bilden auf ihr wieder eine Involution.

Ist nun T_i die Spur von T_i in b_k, so konvergieren im Grenzfalle die Projektionsstrahlen, die von den zu S_i auf F_3 benachbarten Punkten ausgehen, gegen die bestimmte Grenzlage (S_i, T_i), deren Spur in Π mit P_i bezeichnet sei; entsprechend gehört ein Punkt P_i' zu S_i'.

Diese Punktepaare (P_i, P_i'), deren Verbindungsgeraden das Büschel (A_k) in Π bilden, erfüllen den Kegelschnitt $B_i = (A_k, A_l, A_m, A_n, A_p)$, und bilden auf ihm wiederum eine Involution. So wird es verständlich, wie die beiden Leitgeraden b_i, b_k in die gleichbezeichneten Kegelschnitte B_i, B_k übergehen.

Hiermit ist die Realisierung der *Clebsch*schen Abbildung vermöge der schiefen Projektion festgelegt. Da ein beliebiger ebener Schnitt C_3 der F_3 alle 27 g trifft, insonderheit also die Geraden b_i, b_k, c_{ik}; a_l, a_m, a_n, a_p, so projiziert sich die C_3 in eine c_3 durch die sechs Fundamentalpunkte A, und vice versa. Und so weiter.

Umgekehrt, wenn sechs beliebige Fundamentalpunkte A in einer Ebene Π gegeben sind, so hat man nur durch A_i, A_k zwei beliebige windschiefe Raumgerade b_i, b_k zu legen und die schiefe Projektion wiederholt anzuwenden, um die ganze Konfiguration festzulegen.

So einfach diese *„schiefe“* Abbildung der F_3 auf eine Ebene Π erscheint, so ist doch zunächst ihre zwiefache Unsymmetrie zu beachten: einmal werden irgend zwei windschiefe Gerade (b_i, b_k) der F_3 herausgegriffen, sodann wird wiederum unter deren fünf Transversalen eine (c_{ik}) bevorzugt. Andererseits wird die Realität der drei Geraden (b_i, b_k, c_{ik}) vorausgesetzt, womit die beiden letzten *Schläfli*schen Typen (Nr. **10**) mit nur drei (sc. je inzidenten) reellen Geraden ausscheiden.

Dagegen sei gleich hier bemerkt, daß sich die Methode der schiefen Abbildung der F_3 auf die Regelflächen 3. Ordnung, einschließlich des *Cayley*schen Grenzfalles (Nr. **14**) übertragen läßt, indem man zwei windschiefe Gerade der Regelschar nebst einer der beiden Leitgeraden, resp. der Doppelleitgeraden, zugrunde legt.

Um aber zu einer symmetrischen direkten Abbildung der F_3 auf eine Ebene Π zu gelangen, bediene man sich der *„Sekantenprojektion“* und *„Sekantenabbildung“* mittels einer fest gewählten eigentlichen (reellen) kubischen Raumkurve $C_3^{(0)}$. Durch jeden Raumpunkt Q geht eine reelle Sekante s[38]) an die $C_3^{(0)}$, die Π in einem Punkte P treffe;

38) Diese Sekante s läßt sich formentheoretisch einfach darstellen, wenn man die $C_3^{(0)}$ als Normkurve $(N_3 = \mathsf{N}_3)\, x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1$ wählt, s. *W. Franz Meyer,* Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883, Abschnitt 3, und Nr. **19**.

Repräsentiert man den Raumpunkt durch die Koeffizienten einer kubischen binären Form $f(\lambda)$, deren Wurzeln die drei vom Punkte an die N_3 gehenden (Schmiegungs-)Ebenen liefern, so werden die beiden Treffpunkte von s mit N_3

P ist das „*Sekantenbild*“ von Q. Ersichtlich tritt dabei die $C_3^{(0)}$ selbst als Fundamentalkurve auf, insofern jedem Punkte $Q^{(0)}$ der $C_3^{(0)}$ alle Erzeugenden des von $Q^{(0)}$ ausgehenden, die $C_3^{(0)}$ projizierenden Kegels zugehören.

Die Ebene Π treffe die $C_3^{(0)}$ in drei reellen (getrennten) Punkten E_1, E_2, E_3. Das Bild einer C_n ist eine c_{4n} mit d_{2n} in E_1, E_2, E_3, wobei sich die Ordnung von c allemal dann um zwei Einheiten, die Ordnung der d um eine Einheit verringert, wenn C_n die $C_3^{(0)}$ trifft.[58a])

---

durch die *Hesse*sche Form H von f gegeben, und der auf s vierte harmonische Punkt Q durch die Kovariante Q, mithin die Punktreihe auf s durch das Büschel (f, Q).

Die Punktepaare (f, Q) des Raumes stehen in einer eineindeutigen involutorischen kubischen Verwandtschaft T_3, in Übereinstimmung damit, daß die Form $Q(Q)$ wieder, bis auf einen konstanten Faktor, das Quadrat der Diskriminante R von f, mit f übereinstimmt.

In der Verwandtschaft T_3 entspricht einer Ebene, als Ort von Punkten f, eine F_3, deren Gleichung und Abbildung sich genau nach der *Clebsch*schen Vorschrift bilden läßt; die drei in Betracht kommenden linearen Gleichungen besagen im binären Gebiet, daß, bei homogener Schreibweise: $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $Q(\lambda_1, \lambda_2)$, die Form Q konjugiert ist zu den drei Formen $\lambda_1 f_2$, $\lambda_2 f_1$, $\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2$, wo unter f_1, f_2 die beiden Ableitungen von f zu verstehen sind. Die Elimination der Koeffizienten von f (Koordinaten des Punktes f) aus diesen drei Gleichungen nebst der der Ebene (f) liefert die Gleichung der F_3. Vgl. auch die synthetische Behandlung bei „*Reye*“ und *A. Cantone,* Napoli Rend. 15 (1886), p. 181, sowie *P. H. Schoute,* Nieuw Arch. (2) 4 (1899), p. 90.

38a) Das Verfahren des Textes werde noch weiter ausgeführt. Man wähle die feste Kurve $C_3^{(0)}$ als Normalkurve $N_3 = \mathsf{N}_3$ (s. oben, und Nr. **19**), so daß die Koordinaten x_i $(i = 3, 2, 1, 0)$ eines Punktes, von dem die drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an N_3 gehen, zusammenfallen mit den (homogenen) elementarsymmetrischen Verbindungen s_i der λ. Der Punkt (x) läßt sich somit darstellen durch eine kubische binäre Form $f \equiv x_0\lambda^3 - x_1\lambda^2 + x_2\lambda - x_3 \equiv s_0\lambda^3 - s_1\lambda^2 + s_2\lambda - s_3$, mit den Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Sei Π eine im übrigen beliebige, aber feste Projektionsebene, die N_3 in drei reellen getrennten Punkten E_1, E_2, E_3 treffe. Die Ebene Π schneidet die Tangentenregelfläche T-R (4. Ordnung) in einer rationalen Kurve 4. Ordnung $r_4^{(t)}$, die in E_1, E_2, E_3 Spitzen besitzt, deren Tangenten sich in einem Punkte E treffen. Jede Tangente t der N_3 trifft die $r_4^{(t)}$ in einem Punkte P_t, jede Ebene Σ der N_3 in einer Tangente $t^{(t)}$, und umgekehrt.

Ist P_0 irgendein Punkt (λ_0) der N_3 mit der Tangente t_0 und der Ebene Σ_0, so geht von P_0 ein Projektionskegel $K_2^{(0)}$ an die N_3, der Π in einem Kegelschnitte $c_2^{(0)}$ trifft. Dieser berührt die $r_4^{(t)}$ im Spurpunkte $P_0^{(t)}$ von t_0, mit der Spur $t_0^{(t)}$ von Σ_0 als Tangente, und geht überdies durch die Punkte E_1, E_2, E_3. Umgekehrt gehört zu jedem solchen Kegelschnitte $c_2^{(0)}$ ein Projektionskegel $K_2^{(0)}$, mit der Spitze P_0 auf N_3.

Diese Betrachtungen dehne man aus auf irgend zwei Punkte $P_1(\lambda_1)$, $P_2(\lambda_2)$ der N_3 mit den Tangenten t_1, t_2; von ihnen gehen die Projektionskegel $K_2^{(1)}$, $K_2^{(2)}$ an die N_3 mit den Spurkegelschnitten $c_2^{(1)}$, $c_2^{(2)}$ in Π, die durch E_1, E_2, E_3 gehen,

Dies finde seine Anwendung auf eine F_3, auf der man irgendeine (reelle) $C_3^{(0)}$ herausgreife. Es gibt dann sechs Sekanten[39]) der

und die $r_4^{(t)}$ in den Spurpunkten von t_1, t_2 berühren. Vermöge der T_2 des Textes gehen $c_2^{(1)}$, $c_2^{(2)}$ über in die beiden Tangenten λ_1, λ_2 von N_2, und der (vierte) Restschnittpunkt von $c_2^{(1)}$, $c_2^{(2)}$ in den Punkt (λ_1, λ_2). Da aber jener Restschnittpunkt zugleich die Spur der gemeinsamen Kante von $K_2^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ ist, d. i. der N_3-Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$. Somit repräsentiert der Punkt (λ_1, λ_2) die N_3-Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$.

Umgekehrt geht von irgendeinem Raumpunkt P eine einzige Sekante $s(\lambda_1, \lambda_2)$ an die N_3, deren Spur P_s in Π die Sekantenprojektion von P ist. Vermöge der T_2 geht P_s über in den Punkt $P'(\lambda_1, \lambda_2)$, das Sekantenbild von P. Liegt im besonderen P auf der T-R, so geht die Sekante s über in eine Tangente $t(\lambda)$ mit der Spur P_t, das Sekantenbild $P_t'(\lambda)$ von P liegt dann auf N_2, und umgekehrt. Liegt endlich P auf der N_3 selbst, so ist der Punkt ein Fundamentalpunkt der Abbildung, insofern P' die ganze N_2 erfüllt. — Es durchlaufe jetzt P eine Gerade g, die vorerst weder die N_3 treffe noch in Π liege. Der Spurpunkt von g in Π sei G. Das Ebenenbüschel $B(g)$ schneidet Π im Geradenbüschel (G). Irgendeine Ebene E von B treffe die N_3 in drei Punkten $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$, mit den Sekanten $s_1' = (\lambda_2', \lambda_3')$ usf., deren Spuren (auf einer Geraden durch G) $P_1^{(s)}$, $P_2^{(s)}$, $P_3^{(s)}$ seien. Diese letzteren Punkte gehen vermöge der T_2 über in die Ecken P_1', P_2', P_3' des Umdreiecks $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$ von N_2. „Variiert jetzt die Ebene E durch g, so beschreiben die Ecken der ∞^1 Dreiecke $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$ einen ‚Schließungskegelschnitt' c_2' von N_2, das Sekantenbild von g."

Das T_2-Bild der c_2' ist eine rationale Kurve 4. Ordnung $r_4^{(s)}$ mit d_2 in E_1, E_2, E_3.

Man gehe jetzt von irgend vier Punkten der N_3 aus; durch sie gehen zwei Schließungskegelschnitte c_2', c_2'' von N_2. Andererseits entsprechen jenen vier Punkten vermöge der T_2 vier Punkte auf der $r_4^{(t)}$; durch diese gehen vier Tangenten der N_3, die von zwei Transversalen g, g' getroffen werden, den Urbildern von c_2', c_2''. Mithin ist jeder Schließungskegelschnitt c_2' von N_2 das Sekantenbild einer bestimmten Raumgeraden g und umgekehrt. Allgemeiner ist das Bild einer beliebigen c_2 ein linearer Komplex K_1.

Noch sind einige Sonderfälle zu betrachten. Liegt g in Π, so geht das Sekantenbild c_2' durch die drei festen Punkte E_1, E_2, E_3, und umgekehrt.

Ferner treffe g die N_3 in einem Punkte (λ'), so daß eine variierende Ebene E' durch g noch zwei weitere Punkte (λ_1), (λ_2) ausschneidet. Das Sekantenbild c_2' zerfällt dann in die Tangente (λ') an N_2 und eine Gerade c_1', den Ort der Punkte (λ_1, λ_2), und umgekehrt.

Trifft g die N_3 zweimal, in (λ') und (λ''), so zerfällt die c_2' in das Tangentenpaar (λ'), (λ'') von N_2, und umgekehrt.

Liegt endlich g in einer Ebene $\Sigma(\lambda_0)$ der N_3, so berührt c_2' die N_2 an der Stelle (λ_0), und umgekehrt.

Das Gesamtergebnis ist also: „Die ∞^4-Mannigfaltigkeit der Raumgeraden g ist vermöge der Sekantenabbildung (1, 1)-deutig der ∞^4-Mannigfaltigkeit der Schließungskegelschnitte c_2' von N_2 zugeordnet."

Vergleicht man dies mit *Steiners* schiefer Projektion, so macht sich ein wesentlicher Unterschied geltend. Bei der letzteren liegen zwei windschiefe Gerade g_1, g_2 zugrunde, die eine Projektionsebene Π in G_1, G_2 treffen. Eine beliebige Gerade g treffe Π in G. Dann ist das schiefe Bild von g ein Kegelschnitt k' durch G, G_1, G_2. Die ∞^4-Mannigfaltigkeit der g bildet sich daher

$C_3^{(0)}$, die eine „Sechs“ der F_3 bilden; diese projizieren sich in ihre Spuren $A_r^{(0)}$ $(r = i, k, \ldots, p)$ auf Π. Die Geraden b_i der konjugierten

---

ab auf die ∞^8-Mannigfaltigkeit (Gebüsch) der Kegelschnitte k' durch G_1, G_2. In der Tat entsprechen umgekehrt einem vorgegebenen k' des Gebüsches noch ∞^1 Urgerade g, die Erzeugenden der anderen Schar von Erzeugenden des Hyperboloides, das k', g_1, g_2 enthält.

Und analog verhält es sich bei der Projektion einer beliebigen Raumkurve C.

Wir kehren zurück zur Sekantenabbildung einer Geraden g. Ihr steht dual die „Achsenabbildung“ gegenüber, vermöge der g treffenden Achsen $a(\lambda_1', \lambda_2')$ der N_3. Durch die N_3 ist zwischen den Punkten P und Ebenen E ein Nullsystem bestimmt; durch jeden Punkt P, von dem die drei Ebenen $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ aus die N_3 gehen, geht als Nullebene E die Verbindungsebene der drei Punkte $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ der N_3, und vice versa. Durchläuft P eine Gerade g, so dreht sich seine Nullebene um die „konjugierte“ Gerade g', und vice versa. Das Sekantenbild von g resp. g' ist das Achsenbild von g' resp. g; die Bilder von g und g' sind zwei „konjugierte“ Schließungskegelschnitte c_1', c_2'', die N_2 in denselben vier Punkten treffen; die beiden Scharen von ∞^1 Schließungsdreiecken sind auf N_2 dargestellt durch zwei konjugierte Büschel binärer kubischer Formen.

Die Gleichung etwa des Achsenbildes c_2'' von g ergibt sich einfach so. Denkt man sich g als Schnitt zweier Ebenen $(\alpha s) = 0$, $(\beta s) = 0$, mit $(\alpha\beta)_{ik} = \pi_{ik}$, so hat man nur vermöge der Zerlegungen:

$$s_3 : s_2 : s_1 : s_0 = \lambda\sigma_2 : \lambda\sigma_1 + \sigma_2 : \lambda\sigma_0 + \sigma_1 : \sigma_0$$

λ zu eliminieren und erhält:

$$\begin{aligned} c_2'' \equiv & \begin{vmatrix} \alpha_0\sigma_0 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2, & \alpha_1\sigma_0 + \alpha_2\sigma_1 + \alpha_3\sigma_2 \\ \beta_0\sigma_0 + \beta_1\sigma_1 + \beta_3\sigma_2, & \beta_1\sigma_0 + \beta_2\sigma_1 + \beta_3\sigma_2 \end{vmatrix} \\ \equiv & \pi_{01}\sigma_0^2 + \pi_{23}\sigma_2^2 + \pi_{02}\sigma_0\sigma_1 + \pi_{13}\sigma_2\sigma_3 + \pi_{12}\sigma_1^2 + (\pi_{03} - \pi_{12})\sigma_0\sigma_2 \\ \equiv & c_{00}\sigma_0^2 + \cdots + c_{01}\sigma_0\sigma_1 + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Die Identität $\Pi \equiv \pi_{01}\pi_{23} + \pi_{02}\pi_{31} + \pi_{03}\pi_{12} = 0$ liefert die Schließungsbedingung; $S \equiv c_{00}c_{22} - c_{01}c_{12} + c_{11}(c_{11} + c_{02}) = 0$. Analog ergibt sich die Gleichung des Sekantenbildes c_2', wenn man g als Verbindungsgerade zweier Punkte ansieht.

Dieses Eliminationsverfahren überträgt sich sofort auf die Abbildung einer beliebigen Raumkurve C, wenn diese als Schnitt von zwei Flächen oder evtl. als gemeinsamer Schnitt von drei Flächen vorliegt.

Das allgemeinste Verfahren indessen, das zugleich die (1, 1)-Deutigkeit der Abbildung ins Licht setzt, beruht auf der konsequenten Verwendung von Linienkoordinaten. Sei gegeben die Gleichung irgendeines Geradenkomplexes $K_n(p_{ik}) = 0$, wo die p_{ik} Strahlenkoordinaten sind. Man bestimme die dem Komplexe angehörenden Sekanten $s(\lambda_1, \lambda_2)$ der N_3. Nun gilt für letztere die Darstellung:

$$p_{01} : p_{23} : p_{02} : p_{13} : p_{03} : p_{12} = \sigma_0^2 : \sigma_2^2 : \sigma_0\sigma_1 : \sigma_1\sigma_2 : \frac{9\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2}{3} : 3\sigma_0\sigma_2.$$

Die Einsetzung dieser Werte in $K_n(p_{ik}) = 0$ liefert direkt die Gleichung des Sekandenbildes c_{2n}'. Liegt im besonderen eine Raumkurve C vor, so besteht der Komplex aus den sie treffenden Geraden g.

Die duale Achsenabbildung von K_n fließt aus der obigen, wenn man nur die beiden letzten Glieder der Proportion ersetzt durch $\sigma_0\sigma_2$ resp. $\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2$. Um-

Sechs, die die $C_3^{(0)}$ nicht treffen, bilden sich ab auf die r_4 durch $A_k^{(0)}, \ldots, A_p^{(0)}$, mit d_2 in E_1, E_2, E_3; endlich die 15 Geraden c_{ik}, die die $C_3^{(0)}$ einmal treffen, in die c_2 durch $A_i^{(0)}, A_k^{(0)}, E_1, E_2, E_3$.

Das Bild eines ebenen Schnittes C_3 der F_3 wird eine c_6 durch alle $A^{(0)}$, mit d_3 in E_1, E_2, E_3.

Unterwirft man nunmehr die Ebene Π einer quadratischen eindeutigen Transformation T_2, mit dem Fundamentaldreieck E_1, E_2, E_3, wodurch die sechs Punkte $A_i^{(0)}$ in sechs andere A_i übergehen mögen, so ist man damit genau zur *Clebsch*schen Abbildung der F_3 mit den A_i als Fundamentalpunkten gelangt.

Was die Realität anlangt, so bleibt bei dieser Sekantenabbildung der F_3 lediglich der schon oben erwähnte Fall ausgeschlossen, wo die F_2 überhaupt keine eigentliche reelle C_3 trägt.

Auch diese Abbildung ist ohne weiteres auf die Regelflächen 3. Ordnung übertragbar.

Endlich mögen auch noch die Sätze von *Plücker* und *Magnus* (in Nr. **1**) der *Clebsch*schen Abbildung eingeordnet werden.

Bei der *Plücker*schen Aufgabe sollte eine F_2 mit einer gegebenen

---

gekehrt liegt eine beliebige Kurve c' in Π vor, in der expliziten Darstellung:

$$\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = f_2(\lambda) : f_1(\lambda) : f_0(\lambda) = f_2 : f_1 : f_0;$$

oder auch:

$$\sigma_2^2 : \sigma_0^2 : \sigma_2\sigma_1 : \sigma_0\sigma_1 : \sigma_1^2 : \sigma_0\sigma_2 = f_2^2 : f_0^2 : f_2 f_1 : f_0 f_1 : f_1^2 : f_0 f_2.$$

Ersetzt man hier die Quadrate und Produkte der σ durch die entsprechenden p_{ik}, so hat man die Gleichung des Urkomplexes K, dessen Sekantenbild c' ist.

Bemerkenswert ist der einfachste Fall eines linearen Komplexes K_1. Das Sekantenbild ist dann ein keiner Bedingung unterworfener Kegelschnitt c_2' in Π, und umgekehrt, so daß die beiden ∞^5-Mannigfaltigkeiten der linearen Komplexe und der Kegelschnitte in Π (1, 1)-deutig aufeinander abgebildet sind. Artet der Komplex in einen speziellen aus, der eine feste Gerade treffenden Geraden, so werden die Kegelschnitte wieder die Schließungskegelschnitte eines Normkegelschnitts, und vice versa.

Das Vorstehende, das übrigens auch für transzendente Kurven und Komplexe seine Gültigkeit behält, findet im besonderen seine Anwendung auf die F_3 und hier wieder in erster Linie auf die auf der F_3 gelegenen C_1, C_2, C_3 (s. den Text). Der wesentliche Unterschied der vorstehenden Sekantenabbildung des Raumes auf eine Ebene gegenüber der *Steiner*schen Projektion besteht darin, daß bei ersterer einem Geradenkomplex eineindeutig eine ebene Kurve entspricht, während bei der letzteren zwar eine Raumkurve stets in eine bestimmte ebene Kurve übergeht, dagegen umgekehrt einer ebenen Kurve im allgemeinen noch ∞^1 Raumkurven entsprechen.

39) Diese sechs Geraden stellen sich auch dar als die gemeinsamen (eigentlichen) Sekanten der $C_3^{(0)}$ und einer zweiten kubischen Kurve $C_3^{(1)}$, die erstere einmal trifft. Durch beide Kurven geht eine einzige F_3, womit wieder die ganze Figur festgelegt ist.

F_3 in einem Punkte Q eine vierpunktige Berührung haben, so daß die Schnittkurve C_6 in Q einen d_4 aufweist. In der Bildebene E wird also eine c_6 gesucht, die in den sechs Punkten A d_2 besitzt, und außerdem an einer Stelle P, dem Bilde von Q, einen d_4. Dann muß aber die c_6 zerfallen in zwei Gerade, etwa c_{ik} und c_{lm}, die sich in P schneiden, und eine r_4 durch A_i, A_k, A_l, A_m, mit d_2 in A_l, A_m und P; solcher r_4 gibt es noch ein Büschel. Auf der F_3 ist somit Q der Treffpunkt zweier Geraden der Fläche; die Schnittkurve $C_6(F_3, F_2)$ ist eine R_4 mit d_2 in Q, durch die noch ein Büschel von F_2 geht; solcher Büschel gibt es noch eine ∞^1-Schar.

Bei *Magnus* reduziert sich die Frage auf die nach der Natur der Restkurve C_6, die irgendeine, durch eine beliebig auf der F_3 ausgewählte (eigentliche, reelle) C_3 gelegte F_3' aus der F_3 ausschneidet.

In der Ebene E wähle man als Bild der C_3 eine r_5 mit d_2 in den sechs Punkten A, dann ist das Bild der C_6 eine c_4 ($p = 3$) durch die sechs Punkte A, so daß es solcher c_4, und damit von C_6, noch eine ∞^8-Schar gibt. Denkt man sich aber umgekehrt eine solche C_6, und damit r_4, beliebig aber fest gewählt, so gehört dazu noch eine ∞^2-lineare Schar (Netz) von Restkurven r_5, und damit von C_3. Die zugehörigen ausschneidenden F_3' bilden somit auch ein Netz, also, mit der festen F_3 linear zusammengesetzt, ein Gebüsch, und dieses ist gerade das von *Magnus* betrachtete.

Zum Schluß sei noch besonders auf den Satz (s. oben) hingewiesen, daß eine durch zwei windschiefe Gerade der F_3 gelegte F_2 eine rationale C_4 ($= R_4$)[40] — durch die nur eine einzige F_2 hindurchgeht — ausschneidet, während bei Inzidenz der beiden Geraden eine allgemeine (elliptische) C_4 ($p = 1$) resultiert.

12. Formentheoretische Behandlung der Fläche. Eine andere Untersuchungsrichtung sucht projektive Eigenschaften der F_3 durch algebraisch gleichwertige, d. i. invariante Formenbildungen wiederzugeben. *Salmon*[41]) entwickelt, im Anschluß an die spezielle Form (1) (Nr. 2), eine Reihe geometrisch wichtiger In-, Ko-, Kontravarianten

40) Diese rationalen $C_4 = R_4$, nebst ihrer algebraischen Darstellung durch vier biquadratische binäre Formen, scheint zuerst *Salmon* bemerkt zu haben, Cambridge Dublin J. 5 (1850), bes. p. 40, 43, wo die Charaktere der Schnitte einer F_3 mit einer F_2 untersucht werden. Über diese R_4 existiert eine ausgedehnte Literatur. Es genüge hier der Hinweis auf die Monographien: *L. Berzolari,* Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 101; *H. W. Richmond,* Cambr. Trans. 19 (1900), p. 132; *A. Jouffret,* Paris 1903; *O. G. E. Schreck,* Diss. Utrecht 1915, sowie auf den Art. III C 9, *K. Rohn-L. Berzolari,* Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen, Nrn. **59, 60.**

41) *Salmon,* London Trans. 150 (1860), p. 229.

und Zwischenformen. Weiter dringt *Clebsch*[42]) bei Zugrundelegung der allgemeinen F_3-Form ein; speziell die (geraden) Invarianten lassen sich durch fünf „fundamentale" ganzrational darstellen. *P. Gordan*[43]) gelingt es u. a., das Aggregat der fünf Pentaederebenen (Nr. **3**) als einfache Kovariante der F_3 abzuleiten. Weiteres Formenmaterial liefert *R. de Paolis.*[44])

H. Poincaré[45]) geht von allgemeineren Gesichtspunkten aus; er stellt die inäquivalenten Typen der F_3-Formen auf gegenüber linearen Variabelnsubstitutionen 1. mit beliebigen, 2. mit reellen, 3. mit ganzzahligen Koeffizienten. Dadurch werden die Kriterien gewonnen, unter denen jeweils zwei vorgelegte F_3 ineinander linear überführbar sind.

Systematische Anwendungen der Formentheorie auf die Erzeugungen der F_3 und deren Ausartungen, sowie auf den Zusammenhang zwischen dem Pentaeder und den 27 Geraden stehen noch aus. Ebensowenig ist bisher die Aufstellung eines vollen Formensystems der F_3 gelungen. Über die Invariantentheorie der „Hexaederform" F_3' vgl. Nr. **18**; über die binär-invarianten Beziehungen auf der F_3 vgl. Nr. **19**.

Neuerdings hat *W. Fr. Meyer*[45a]) ein Übertragungsprinzip an-

---

42) *Clebsch,* J. f. Math. 58 (1861), p. 93, 109. Vermöge des „*Clebsch*schen Übertragungsprinzips" (s. Note 45a) lassen sich aus den Invarianten gewisse Komplexgleichungen herleiten. — Über die geometrische Deutung der F_3-Invarianten durch *K. Bobek* s. Nr. **2**, Note 3.

43) *Gordan,* Math. Ann. 5 (1872), bes. p. 376.

44) *de Paolis,* Rom Linc. Mem. (2) 10 (1880/81), p. 123, s. Nr. **18**.

45) *Poincaré,* J. Éc. Pol. 51 (1883), p. 45.

45a) *W. Fr. Meyer,* Giorn. di mat. 1829. Wir beschränken uns hier auf den binären Fall des Prinzips und seine Anwendung auf den S_3. Es liege vor eine Reihe von Urformen $G_p(x_m) = G$, $H_q(x_m) = H$, ..., der Ordnungen $p, q, \ldots$ in einer *nichthomogenen* Variabeln x_m: $G \equiv a_0 x_m^p + a_1 x_m^{p-1} + \cdots + a_p$, $H \equiv b_0 x_m^q + b_1 x_m^{q-1} + \cdots + b_q$, ..., wo die Koeffizienten a_r, b_s, ... ternäre Formen in drei *homogenen* Variabeln x_i, x_k, x_l der Ordnungen $r, s, \ldots$ bedeuten. Ferner sei $K_\nu(x_m) = K = k_w x_m^\nu + k_{w+1} x_m^{\nu-1} + \cdots + k_{w+\nu}$ eine (binäre) Kovariante der Urformen $G, H, \ldots$ von der Ordnung ν und dem Leitgliedgewichte w.

Man deute x_i, x_k, x_l; x_m als homogene Punktkoordinaten im S_3. Unter A_m sei ein beliebig, aber fest gewählter Punkt verstanden, den man in die m^{te} Koordinatenecke verlege. Durch A_m lege man irgendeine Gerade g; ihr laufender Punkt läßt sich durch den Wert des nichthomogenen Parameters x_m angeben.

Die quaternären Gleichungen $G(x_i, x_k, x_l; x_m) = 0$ usf. stellen dann ein System von Urflächen $G, H, \ldots$ dar, und zugleich die binären Gleichungen $G(x_m) = 0$, $H(x_m) = 0$, .. mittels ihrer x_m-Wurzeln die Reihen $(P), (Q)$ der Schnittpunkte, die g mit den Urflächen gemein hat. Denkt man sich nunmehr auch die ν Wurzeln von $K(x_m) = 0$ als eine Punktreihe (K) auf g aufgetragen — die zu den obigen Reihen in invarianter Beziehung steht —, so erfüllt die Reihe (K), bei Variieren von g, eine zum Systeme $(G, H, \ldots; A_m)$ kovariante

gegeben, mittels dessen Flächen, die zu einer F_3 (allgemeiner einem System von Flächen $F_p, F_q, \ldots$), der man noch einen Punkt und evtl.

Fläche K, deren Gleichung dann *direkt* durch $K(x_i, x_k, x_l; x_m) = 0$ geliefert wird, und daraufhin diskutierbar ist.

Im besonderen kann sich auch — für $\nu = 0$ — die Kovariante K auf eine Invariante J reduzieren; die Gleichung $J = 0$ stellt dann den Kegel dar, dessen Kanten g solche Punktreihen $(P), (Q), \ldots$ tragen, die an die Beziehung $J = 0$ geknüpft sind.

Es folgen einige Anwendungen des Prinzips. Als Urfläche liege vor eine F_3 mit der Gleichung: $F_3 \equiv a_0 x_m^3 + 3a_1 x_m^2 + 3a_2 x_m + a_3 = 0$. Eine Gerade g durch A_m treffe die F_3 im Punktetripel $P = (P_1, P_2, P_3)$. Auf g denke man sich einmal die beiden zum Tripel P äquianharmonischen Punkte H_1, H_2 bestimmt, andererseits die drei harmonischen Punkte Q_1, Q_2, Q_3.

Der Ort von H_1, H_2 ist eine Fläche 4. Ordnung H, die „äquianharmonische" — die *E. Ciani*, Lomb. Ist. Rend. (2) 54 (1921), p. 255, direkt untersucht —, und der Ort von Q_1, Q_2, Q_3 eine Fläche 6. Ordnung Q, die „harmonische". Die Gleichungen der beiden Flächen sind $H(x_m) = 0$, $Q(x_m) = 0$, wo H, Q die beiden Kovarianten von $F_3(x_m)$ bedeuten. Es besitzt H in A_m einen d_2, Q einen d_3. Ist D die Diskriminante von $F_3(x_m)$, so ergibt $D = 0$ (s. auch Nr. **2**, Note 7) den von A_m an die F_3 gehenden Berührkegel D, der die F_3 längs einer C_6 berührt. Die Fläche H enthält diese C_6 doppelt und Q dreifach.

Endlich liegen auch die sechs, von A_m an die F_3 gehenden Haupttangenten — für die $H(x_m)$ identisch verschwindet — auf beiden Flächen. — Läßt man den Punkt A_m auf die F_3 rücken (s. Nr. **16**), so sondert sich von der Fläche Q eine Fläche 2. Ordnung ab, und es verbleibt eine Fläche 4. Ordnung Q', die „eigentliche harmonische" Fläche. Die beiden Flächen H und Q' haben die wesentlichsten Eigenschaften gemein: sie haben in A_m einen d_2, berühren sich sowie die F_3 und den Kegel (4. Ordnung) D längs der Kurve C_6, die sie als Doppelkurve enthalten, und es liegen auf ihnen die beiden von A_m an die F_3 gehenden Haupttangenten. Diese Eigenschaften spiegeln sich wieder, wenn man die ganze Figur mit einer Ebene schneidet.

Ähnlich verhält es sich bei dem Sonderfalle, wenn die F_3 zerfällt in eine (einteilige) F_2 und eine Ebene E.

Man hat wiederum zwei Flächen 4. Ordnung H und Q', wo H dann und nur dann reell ausfällt, wenn der von A_m an die F_2 gehende Berührkegel B mit seinem Berührkegelschnitt b einteilig ist. Im übrigen haben H und Q' die wesentlichsten Eigenschaften gemein: sie haben in A_m einen d_2, berühren sich sowie F_2 und B längs b, besitzen den Schnitt k von F_2 und E als Doppelkegelschnitt und enthalten die beiden Geraden, die von A_m an die beiden Treffpunkte von k und b gehen.

In dem metrisch ausgezeichneten Falle, wo die F_2 eine Kugel ist und E die E_∞, werden die beiden Flächen H und Q' zu Rotationszykliden (s. Nr. **16**). — Entsprechendes gilt in der Ebene.

Nunmehr adjungiere man dem Systeme (F_3, A_m) noch irgendeine Ebene F_1, die vorerst nicht durch A_m gehe, und die Gerade g im Punkte R' treffe.

Die drei, bezüglich R' zum Tripel (P_1, P_2, P_3) harmonischen Punkte R_1, R_2, R_3 erfüllen, bei Variieren von g, eine Fläche 6. Ordnung R, mit d_3 in A_m, deren Gleichung sich in eine durchsichtige Gestalt bringen läßt. Interessanter

noch eine Ebene adjungiert hat, kovariant sind, eine einfache Behandlung zulassen. Bemerkenswert sind insbesondere die „äquianharmonische" Fläche und die beiden „harmonischen". Auch auf die dritte *Steiner*sche Erzeugung der F_3 (s. Nr. 8) fällt so ein neues Licht.

Ein anderes, von demselben[45b]) Verfasser herrührendes Übertragungsprinzip symbolischen Charakters erlaubt eine einfache Lösung

---

ist der Sonderfall, wenn die Ebene F_1 durch A_m geht; es reduziert sich dann R auf eine Fläche 3. Ordnung F_3', die „bez. A_m harmonische" Fläche; auf sie hat *D. Montesano* hingewiesen, s. Nr. **13**, Note 50. F_3 und F_3' sind eineindeutig aufeinander durch eine quadratische *Cremona*-Transformation bezogen. Besitzt die F_3 einen d_2, so auch die F_3'. Es liege der d_2 von F_3 in D; auf der Geraden g (A_m, D) bestimme man den Restschnittpunkt D', sowie den bez. A_m zu (D, D') harmonischen Punkt M. *Dann ist M der zugehörige d_2* der F_3'.

Endlich sei noch der Fall erwähnt, wo das Ursystem aus zwei Flächen 2. Ordnung F_2, F_2' und deren Büschel B besteht. Es trifft g das Büschel in einer Involution, deren Doppelpunkte D_1, D_2 eine durch A_m gehende F_3 erfüllen. Da diese auch die Berührungspunkte der von A_m an die Individuen von B gehenden Tangenten enthält, fällt sie mit der nach der *Steiner*schen Erzeugung (II′) (s. Nr. 8) entstehenden F_3 zusammen, erscheint aber hier unter allgemeinererem Gesichtspunkte. Das durch A_m gehende Individuum von B besitzt zwei durch A_m laufende Erzeugende g_1, g_2, die der F_3 angehören; die Grundkurve C_4 von B ist die Berührkurve des von A_m an die F_3 gehenden Berührkegels.

Wählt man umgekehrt auf gegebener F_3 den Punkt A_m als reellen Schnittpunkt zweier inzidenter Geraden g_1, g_2 der F_3, und legt von A_m an die F_3 den Berührkegel mit der Berührkurve C_4, so ist das zugehörige F_2-Büschel B eben das durch C_4 als Grundkurve bestimmte.

Analoge Erscheinungen treten im Falle einer ebenen c_3 ein.

45b) *W. Fr. Meyer*, Giorn. di mat. 1929. Dieses Prinzip hat eine gewisse formale Ähnlichkeit mit dem bekannten von *Clebsch* (s. Art. I B 2, Invariantentheorie, *W. Fr. Meyer*), wonach irgendeine in symbolischen Klammerfaktoren ausgedrückte Invariante J, etwa einer binären Form (oder eines Systemes solcher), nach Ränderung mit Variabeln u, gleich Null gesetzt, eine Klassenkurve liefert, deren Tangenten aus einer gegebenen ebenen Ordnungskurve Punktreihen mit der Eigenschaft $J = 0$ ausschneiden.

Zur Illustration des neuen Prinzips mögen einige Beispiele genügen. Sei die symbolische Gleichung einer $F_3 : (a\,x)^3 = 0$. Faßt man irgendeinen Raumpunkt (x) auf als Schnitt dreier Ebenen $(u)(v)(w)$, so sagt die Gleichung $(a\,u\,v\,w)^3 = 0$ aus, daß sich die Ebenen auf der F_3 schneiden.

Hier wird man zwei Fälle unterscheiden. Entweder hält man die Ebene $(w) = (\varepsilon)$ fest, und läßt (u) und (v) nebst ihrer Achse π variabel, oder aber man hält die beiden Ebenen $(u) = (\varepsilon)$, $(v) = (\eta)$ nebst ihrer Achse π' fest, und läßt (u) variieren.

Im ersteren Falle stellt die Gleichung $(a\,u\,v\,\varepsilon)^3 = 0$ — die man weiter nach den Achsenkoordinaten $\pi_{ik} = (uv)_{ik}$ entwickele, unter Wiedereinführung der realen Koeffizienten von F_3 — die Schnittkurve c_3 von F_3 mit (ε) in *einer* Gleichung dar, als den Komplex 3. Ordnung der sie treffenden Geraden π. Führt man hier statt der $\pi_{ik} = (uv)_{ik}$ die ihnen proportionalen komplementären Strahlen-

verschiedener, auf den Schnitt einer (oder mehrerer) F_3 mit Geraden und Ebenen zurückkommender Aufgaben.

13. Reziprokalflächen. Die Steinersche Fläche S als Reziproke einer F_3 mit vier Knoten und ihre Abbildung auf die Ebene. Der F_3 steht dualistisch eine Φ_3 (mit 36 „Doppelsechsen") gegenüber, deren Ordnung zwischen zwölf und drei variieren kann.

Speziell ist die Reziproke einer F_3 mit vier Knoten[46]), die

---

koordinaten $p_{lm} = (xy)_{lm}$ ein und hält wiederum den Punkt (y) fest, so gewinnt man die Gleichung des über der c_3 stehenden Kegels mit der Spitze (y).

Im zweiten Falle ergibt sich durch $(a\varepsilon\eta u)^3 = 0$ die Gleichung des Schnittpunktetripels der Geraden $p' = (\varepsilon\eta)$ mit der F_3 in Ebenenkoordinaten u, d. h. als (ausgeartete) Fläche 3. Klasse. In beiden Fällen läßt sich die Figur von neuem, unter fortlaufender Anwendung des Prinzips, alternierend den Prozessen des Schneidens und Projizierens unterwerfen.

Man beachte, daß bei Anwendung des Prinzips von der Symbolik lediglich als abgekürzter Schreib- und Rechnungsweise Gebrauch gemacht wird, ohne auf deren innere invariantentheoretische Bedeutung zu rekurrieren.

46) Über diese speziellen F_3 [auf die wohl zuerst *Steiner* hingewiesen hat, s. den Brief an *Jacobi* bei *E. Jahnke*, Arch. Math. Phys. (2) 4 (1909), p. 268] vgl. besonders *F. E. Eckardt*, Math. Ann. 5 (1872), p. 30 (s. auch Progr. Reichenbach 1869). [Weitere Einzelausführungen bei: *R. Townsend*, Quart. J. 10 (1869), p. 26; *Saltel*, Brux. Bull. (2) 35 (1873), p. 46, 539; *H. Maynz*, Progr. Ludwigslust 1883; *C. Sharp-Sisam*, Educ. Times 54 (1891), p. 52; *W. Jaeckel*, Progr. Gymn. Olden 1909.] Wählt man die vier Knoten als Koordinatenecken, so nimmt die Gleichung der F_3 die einfache Form an: $\sum \frac{a_i}{x_i} = 0$; die F_3 geht also aus einer Ebene $\sum \frac{a_i}{y_i} = 0$ hervor vermöge der eineindeutigen involutorischen kubischen Transformation T_3: $\sigma x_i y_i = 1$, für die das Koordinatentetraeder Fundamentaltetraeder ist. [Über diese T_3 s. *W. Franz Meyer*, Heidelberg intern. Math.-Kongreß 1904, p. 322.] Bei der *Clebsch*schen Abbildung der F_3 auf die Ebene (Nr. **11**) werden also die sechs Fundamentalpunkte A_i im besonderen die Ecken eines vollständigen Vierseits und umgekehrt. In jede der Kanten des Tetraeders sind vier Gerade der allgemeinen F_3 zusammengefallen, die drei noch übrigen Geraden sind gegeben durch: $\frac{a_i}{x_i} + \frac{a_k}{x_k} = 0$, $\frac{a_l}{x_l} + \frac{a_m}{x_m} = 0$, die sich in der T-Ebene $\sum \frac{x_i}{a_i} = 0$ befinden. Vermöge der T_3 entsprechen den ∞^4 Geraden des Raumes die ∞^4 C_3 durch die Koordinatenecken; durch jede solche C_3 geht ein Büschel der in Rede stehenden F_3. Über die metrischen Beziehungen der Fläche zum Tetraeder s. Nr. **23**.

Die zur F_3 gehörigen Klassengleichungen gehen aus den Ordnungsgleichungen der *Steiner*schen Fläche S (s. den Text) unmittelbar hervor. Trotz ihrer Spezialität gewinnen diese F_3 bei Erörterung der gestaltlichen Verhältnisse der allgemeinen F_3 (Nr. **17**) Bedeutung. — Synthetisch, auf Grund des Verhaltens von zwei C_3 auf einem Kegel 2. Ordnung K_2, verfolgt die F_3 mit $4d_2$ *M. Zacharias*, Arch. Math. Phys. (3) 18 (1911), p. 289. Die C_3 durch einen festen Punkt

Steinersche (*Römische*) Fläche S^{47}), von Interesse, eine F_4 mit vier „Doppelebenen", und drei durch einen Punkt gehenden Doppel-

---

der F_3 verteilen sich auf ∞^1 Paare, die den K_2 eines Büschels angehören; die Klassifikation dieser Büschel zieht die der F_3 nebst ihrer Konstruktion nach sich. Es wird auch die Polarentheorie der Fläche entwickelt.

Unabhängig von *Eckardt* entwickelt *H. E. Timerding,* Arch. Math. Phys. (3) 20 (1912), p. 98, dessen Methode von neuem, berücksichtigt aber auch imaginäre d_2.

Binär-invarianter Hilfsmittel bedient sich *E. Laguerre,* Nouv. Ann. (2) 11 (1872), p. 319, 334, 418; 12 (1873), p. 55. Die Koeffizienten einer biquadratischen Gleichung $f_4(t) = 0$ mit den Invarianten i, j werden als Pentaederkoordinaten eines veränderlichen Raumpunktes gedeutet. Dann ist $j = 0$ die Gleichung einer F_3, deren $4\,d_2$ die stationären Punkte der durch $f_4 = 0$ dargestellten rationalen Kurve 4. Klasse P_4 sind; die F_3 erscheint als Ort der Punkte, von denen vier harmonische Ebenen an die P_4 gehen. Weitere Eigenschaften der F_3 fließen aus denen der abwickelbaren F_6: $D \equiv i^3 - 27j^2 = 0$ (wo D die Diskriminante von f_4 ist). Diese Fläche untersucht eingehend *Cayley,* Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 99, 219, 374; Quart. J. 9 (1871), p. 129. Der Schnitt der F_3: $j = 0$ mit der F_2: $i = 0$ ist die Rückkehrkante der F_6; sie ist eine Asymptotenkurve der F_3, und umgekehrt lassen sich alle diese Kurven auf der F_3 in jener Form darstellen. [Wählt man die Asymptotenkurven als Parameterkurven u, v der F_3, so läßt sich nach *T. Egorow,* Paris C. R. 132 (1901), p. 538, das Krümmungsmaß K der Fläche auf die einfache Form bringen: $K = \dfrac{-1}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2}$.]

Andererseits hat *A. Goller,* Progr. Ludwigs-Realschule München 1902, die S mit ternär-invarianter Symbolik untersucht, indem er die Form $S \equiv u_\alpha a_x^2$ ansetzt, wo die u quaternäre, die x ternäre Variable sind. Insbesondere leitet er auf diesem Wege die Gleichung und die Eigenschaften der Asymptotenkurven von S ab. Weiterhin werden auch quaternäre Gebilde verfolgt, so die *Hesse*sche Fläche von S.

Endlich sei noch eine liniengeometrische Behandlung der F_4 mit $4\,d_2$, als Klassengebilde, erwähnt, bei *K. Ogura,* Tôhoku Math. J. 14 (1918), p. 28. Er geht von einem linearen „Punkt-Geraden-Konnex" $\sum_{i=1}^{i=4} P_i x_i = 0$ aus. Zu jedem Punkt (x) gehören die (Koinzidenz-)Strahlen eines Büschels in einer Ebene E_x; beschreibt (x) eine Ebene, so berührt die E_x eine F_3 mit $4\,d_2$.

Es sei noch auf eine metrisch interessante F_3 mit $4\,d_2$ hingewiesen, den Ort eines Punktes P, dessen Verbindungsgeraden mit zwei festen Punkten P_1, P_2 gegen eine feste Ebene E gleich geneigt sind. (Sie ist der Spezialfall einer von „*Sturm*", p. 301, untersuchten Fläche.) Diese F_3 untersucht *H. Thieme,* Ztschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 362; sie hat zwei reelle d_2 in P_1, P_2, und zwei imaginäre d_2 in den beiden Kreispunkten von E. Von den neun g der F_3 sind drei reell, zwei Gegenkanten des d_2-Tetraeders und deren Transversale. Vgl. *G. da Fano,* Ztschr. f. Realschulwesen 37 (1912), p. 524. *K. Böheim,* ebenda 38 (1913), p. 524, betrachtet in projektiver Verallgemeinerung die durch projektive Zuordnung eines Ebenenbüschels und eines Kegel-K_2-Büschels erzeugte F_3. Die *Thieme*sche F_3 steht in naher Beziehung zu den von *E. Müller,* Deutsche Math.-

geraden, die von jeder ihrer Tangentialebenen in $2C_2$ geschnitten wird.[47a])

Bemerkenswert ist die von *Weierstraß*[48])[48a]) herrührende Darstel-

Ver. 25 (1916), p. 209, eingeführten „axialinversen" F_3. Zwei Raumpunkte P, P' heißen „axialinvers", wenn ihre Verbindungsgerade eine feste Achse in einem Punkte R so trifft, daß das Produkt der Strecken (PR) und $(P'R)$ konstant bleibt. Einer Ebene (P) entspricht dann eine axialinverse F_3. [Auf eine eigentümliche Beziehung der F_3 mit $4d_2$ zur *Fresnel*schen Wellenfläche hat schon *Steiner* hingewiesen, Werke 2, p. 724, vgl. *E. Lampe,* Progr. Berlin 1870; Arch. Math. Phys. (3) 20 (1910), p. 111.

47) *Steiner,* Werke 2, p. 721 (Nachlaß) (s. *„Timerding"*, p. 872 ff.). Vgl. die Bemerkungen von *Weierstraß,* p. 741; *E. E. Kummer, K. Weierstraß, Schroeter,* Berl. Ber. 1863 = J. f. Math. 64, p. 66, 77, 79; *Cremona,* J. f. Math. 63 (1864), p. 315; Ist. Lomb. Rend. 4 (1867, Jan.), p. 15; *Clebsch,* J. f. Math. 67 (1867, dat. Juli 1866), p. 1. *Sturm,* Math. Ann. 3 (1871), p. 76, untersucht die Fläche besonders vom Klassenstandpunkt aus.

47a) Diesen Satz beweist *K. Th. Vahlen,* Acta math. 19 (1895), p. 194, mittels einfacher Determinantenrechnung.

48) Bezieht man also die Raumpunkte eines S_3' kollinear auf ein F_2-Gebüsch eines S_3, so entsprechen den Ebenen *Steiner*sche Flächen. Umgekehrt hat hierauf *„Reye"*, p. 140, sowie J. f. Math. 86 (1878), p. 84; Math. Ann. 48 (1896), p. 113, die Abbildung der Fläche gegründet. Einem Punkte P entsprechen acht assoziierte Punkte im S_3', einer Geraden g' eine C_4, einer F_n' eine F_{4n}, und im besonderen einer E' eine S. Vgl. die analytische Behandlung bei *V. Snyder* und *F. R. Sharpe,* Amer. Math. Soc. Trans. 19 (1898), p. 275, und die synthetischen Ergänzungen bei *A. Jopke,* Arch. Math. Phys. (3) 18 (1910), p. 133. Mit Vorteil wählt *Timerding* das F_2-Gebüsch als ein solches mit gemeinsamem Poltetraeder, Ann. di mat. (3) 1 (1917), p. 98; Ens. math. 19 (1917), p. 89.

E. Lacour, Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 437, 499, vereinfacht die Abbildung der S, indem er deren Gleichung in eine rationale metrische Form bringt. Die Bilder der Asymptotenkurven von S sind gewisse c_2. (S. auch Note 50a.) Die parabolische Kurve von S zerfällt in die vier Berührungs-C_2 der vier singulären Ebenen.

Auf Grund der irrationalen Darstellung untersuchen die S: *C. Segre,* Giorn. di mat. 21 (1883), p. 358; *A. Roberts,* Mess. 11 (1885), p. 132, wo drei orthogonale Transformationen aufgestellt werden, die die S in sich überführen. Eine metrische Spezialisierung der S nimmt *K. Merz* vor, Diss. Techn. Hochsch. Zürich 1914, Schweiz. Nat. Ges. 1914, p. 102. Für rechtwinklige x, y, z legt er die irrationale Gleichung $\sqrt{\frac{x}{\beta}} + \sqrt{\frac{y}{\alpha}} + \sqrt{\frac{z}{\gamma}} = 1$ zugrunde. Vermöge der quadratischen Transformation: $\xi^2 = x$, $\eta^2 = y$, $\zeta^2 = z$ wird die S abgebildet auf ein Oktaeder. In der Diss. erscheinen die Ebenen des Oktaeders als Ort der Doppelgeraden eines gewissen Strahlensystems. *Merz* gibt auch historische Notizen über die S: Ens. math. 19 (1917), p. 89.

Umgekehrt untersucht *P. L. Schoute,* Amsterdam Ak. 4 (1896), p. 224, 272, eine gewisse F_4 als projektive Verallgemeinerung der S. Auf solchen F_4 liegen weder C_{2n+1} noch elliptische C_4, wie das für die S bereits *„Cremona"* und *„Sturm"* gezeigt hatten. — *A. Armenante,* Giorn. di mat. 12 (1874), p. 250,

lung der Koordinaten x_i eines Punktes der S als beliebiger quadratischer Formen in drei Parametern λ, die nach *Clebsch* und *Cremona* eine durchsichtige Abbildung[47]) auf die λ-Ebene zur Folge hat (1867).

Einen ebenen Schnitt der S, d. i. einer R_4[49]), deren drei d_2 auf den drei Doppelgeraden liegen und für die die Spuren der vier Doppelebenen die Doppeltangenten sind, entspricht in der Bildebene eine c_2

studiert im besonderen die R_4 auf S; *J. Rowe,* Amer. Math. Soc. Proc. 12 (1911), p. 295, gibt eine Konstruktion der Tangentialebene. — Bezüglich der Metrik der S sei noch hingewiesen auf: *E. Amigues,* Nouv. Ann. (2) 19 (1878), der die S als „Mittelpunktsfläche" behandelt; *Cayley-Sharp,* Educ. Times 39 (1883), p. 31, wo der Umriß von einem Punkte einer Doppelgeraden aus als Ellipse ermittelt wird; *W. Schmidt,* Progr. Realgymn. Lüdenscheid 1889, wo die S erscheint als Ort der Punkte, für die die Summe der auf zwei feste windschiefe Gerade gefällten Lote gleich deren kürzestem Abstand δ ist. [Ersetzt man hier δ durch eine beliebige Konstante, so entsteht eine allgemeinere F_4.]

48a) Die *Weierstraß*sche Darstellung der S ist nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinert worden. So hat man analog überhaupt F mit Scharen von C_2 untersucht, s. *G. Koenigs,* Paris C. R. 105 (1887), p. 407; J. Éc. Norm. (37) 5_2 (1887), p. 177, wo durch jeden Punkt der F n C_2 gehen; *G. Jung,* Palermo Rend. 4 (1890), p. 253 [F_3 und F_4 mit $\overline{C}_2$ s. Nr. **16**]; *Ed. Weyr,* Monatsh. Math. Phys. 2 (1891), p. 351; *Fr. Machovec,* Rosprawy 1893, Nr. 10 [Untersuchung der Tangentialebenen]; *E. Cosserat,* Paris C. R. 124 (1897), p. 1004; ebenda 130 (1900), p. 311, 385, wo F mit doppelter C_2-, im besonderen mit Kreiserzeugung verfolgt werden; *C. H. Sisam,* Amer. 7. Math. 30 (1908), p. 99 [F_3].

Mit Hilfe dieser Methode hat man die S auch als Projektion vom S_4 aus untersucht: s. *G. Veronese*, Rom Linc. Mem. (3) 19 (1884); *E. Ascione,* Rom Linc. Rend. (5) 6_1 (1897), p. 162, 240; *E. Cosserat,* s. oben 1897. Andererseits hat man das Analogon der S im S_n betrachtet: für $n = 4$ bei *A. Tanturri,* Giorn. di mat. (2) 14 (1907), p. 45, 291; allgemein bei *A. Brambilla,* Napoli Atti (2) 9 (1899), p. 185. — Nach einer anderen Richtung verläuft eine Erweiterung der *Weierstraß*schen Darstellung, indem an die Stelle der vier Quadrate linearer Ternärformen vier n^{te} Potenzen treten, s. *A. Brambilla,* Torino Atti 20 (1885), p. 781 [die Haupttangentenkurven bilden sich auch dann als die Inkegelschnitte eines Vierseits ab, s. Note 50a]; Lomb. Ist. Rend. (2) 21 (1888), p. 334, 541; Palermo Rend. 2 (1888), p. 176; *G. Lazzeri,* Ven. Ist. Atti (6) 6 (1888), p. 171; *A. Brambilla,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 1, wo die irrationale Darstellung auf den nächst höheren Fall ausgedehnt wird: $\sum_{i=1}^{i=5} \sqrt{A x_i} = 0$ und dann eine F_8 liefert.

Umgekehrt ordnen sich der Darstellung von S die der $R \cdot F_3$ unter, s. Nr. **14**.

49) Umgekehrt denke man sich eine r_4, indem man ihre vier Doppeltangenten als Koordinatenvierseit wählt, dargestellt durch $\varrho x_i = f_i^2(\lambda)$, wo die f quadratische binäre Formen sind. Da die f_i an eine lineare Identität gebunden sind, so nimmt die implizite Gleichung der r_4 die Gestalt an: $\sum b_i \sqrt{x_i} = 0$.

Wegen der Apolaritätszusammenhänge zwischen dem Doppeltangentenvierseit und dem Doppelpunktsdreieck vgl. auch *A. Brill,* Math. Ann. 29 (1882), p. 531, sowie das Referat von *W. Franz Meyer* in den Fortschr. d. Math. 14 (für 1882), p. 534.

eines beliebigen Gebüsches, von dem man irgend vier linear unabhängige als Grundkurven wählen kann. Das Gebüsch der c_2 läßt sich auffassen als die Gesamtheit der c_2, die zu einer Schar Σ von γ_2 mit vier festen gemeinsamen Tangenten $(t_i = 0)$ apolar (konjugiert) sind. Diese vier gemeinsamen Tangenten t_i, doppelt gezählt, gehören also dem Gebüsch der c_2 an, und sind die Bilder der vier Doppelebenen. Damit läßt sich die *Weierstraß*sche Darstellung der S normieren zu $\varrho x_i = t_i^2$; da die vier Linearformen t_i an eine lineare Identität, etwa $\sum b_i t_i \equiv 0$, gebunden sind, so wird die implizite Gleichung der S in irrationaler Gestalt: $\sum b_i \sqrt{x_i} = 0$. Der Schar der γ_2 gehören als ausgeartete Klassenkegelschnitte drei Punktepaare an, deren Verbindungsgeraden das Hauptdreiseit des t_i-Vierseits bilden; alle c_2 des Gebüsches treffen die Seiten dieses Hauptdreiseites in Involutionen von (je zu den Grundpunkten) harmonischen Punktepaaren.

Die in Geradenpaare zerfallenden c_2 des Gebüsches sind die Bilder der von den Tangentialebenen der S ausgeschnittenen C_2-Paare. Ist P der beliebig vorgegebene Doppelpunkt eines solchen unbekannten Geradenpaares, so ergeben sich die Geraden des Paares, in dem man die auf zwei der drei Hauptseiten befindlichen Punktinvolutionen von P aus projiziert, und dann das beiden Geradeninvolutionen gemeinsame Paar bestimmt.

Ist andererseits von den beiden Geraden einer zerfallenden c_2 des Gebüsches die eine beliebig gewählt, so ist die andere damit eindeutig bestimmt.

Die drei Hauptseiten sind die Bilder der drei Doppelgeraden der S, insofern jedem der obigen Punktepaare ein Punkt der zugehörigen Doppelgeraden entspricht. Das aus den Ecken des Hauptdreiseits gebildete Dreieck Δ ist das Bild des Punktes d_3, in dem die drei Doppelgeraden zusammenlaufen; dem Ebenenbündel dieses Punktes korrespondiert das Δ umgeschriebene Netz von c_2. Hieraus folgt nach *Darboux*[49a]), daß die Bilder der Haupttangenten von S die Inkegelschnitte des Vierseits der t_i sind.

49a) *G. Darboux*, Soc. Phil. B 10 (1873), p. 37. Der Satz kommt auf eine einfache Eigenschaft der mit der Schar Σ der γ_2 verknüpften quadratischen, involutorischen Geradenverwandtschaft T_2 zurück. Vermöge dieser entsprechen sich zwei Gerade g, g', wenn sie bezug auf alle γ_2 in Σ konjugiert sind.

Andererseits erscheinen diese ∞^2 Geradenpaare (g, g') als die zerfallenden Individuen des zu Σ apolaren c_2-Gebüsches. Denkt man sich irgendeine Gerade g gegeben, so wird sie von einer bestimmten γ_2 (in Σ) berührt. Ist P_1 der Berührungspunkt, so geht die, g vermöge T_2 entsprechende Gerade g' durch P_1 hindurch. Nun sind g, g' die Bilder der beiden C_2, die auf S von der Tangentialebene im Bildpunkte P (von P_1) ausgeschnitten werden. Die beiden Tan-

Von *S. Lie*[50]) rührt der Satz her: Der Ort der Pole irgendeiner festen Ebene ε in bezug auf alle, einer S angehörigen C_2, ist wiederum

---

genten der C_2 in P sind die durch P laufenden Haupttangenten von S. Läßt man die Gerade g als Tangente längs der obigen γ_2 wandern, so haben γ_2 und g jeweils im Berührungspunkte P_1 die Fortschreitungsrichtung gemein, und ersichtlich sind die γ_2 von Σ die einzigen Kurven dieser Art. Somit sind in der Tat die γ_2 von Σ die Bilder der Haupttangentenkurven von S, die sich daraufhin als Kurven R_4 leicht diskutieren lassen.

In den Sonderfällen (s. Nr. **14**), wo S in eine allgemeine R-F_3, und noch spezieller in eine *Cayley*sche R-F_3 ausartet, treten nur hinsichtlich der Schar Σ einige Modifikationen ein.

Im Falle der allgemeinen R-F_3 hat das c_2-Gebüsch einen Grundpunkt A, der doppelt zählend der Schar Σ angehört. Ist $\gamma_2^{(0)}$ irgendein eigentliches (und damit nicht durch A gehendes) Individuum von Σ, und sind t_1, t_2 die beiden von A an $\gamma_2^{(0)}$ gehenden Tangenten mit den Berührpunkten T_1, T_2, so ist Σ die Schar der, t_1, t_2 in T_1, T_2 berührenden γ_2. Im Spezialfalle der *Cayley*schen R-F_3 liegt A auf γ_2^0 und damit auf allen γ_2, und die Schar Σ besteht aus allen, $\gamma_2^{(0)}$ in A hyperoskulierenden γ_2.

50) *Lie*, Arch. Math. og Nat. 3 (1878), p. 84. Nach Angabe von *Noether*, Math. Ann. 53 (1900), p. 3, hat *Lie* seinen Satz schon 1869 der Universität zu Kristiania eingereicht. — Die *Lie*sche Fläche sei kurz mit L_ε bezeichnet.

G. Koenigs, Soc. math. fr. Bull. 16 (1888), p. 15, findet den Satz von neuem und gibt einen einfachen analytischen Beweis. Er fügt hinzu, daß die Doppelberührebenen von S einfache Berührebenen von L_ε sind, und daß L_ε durch den Schnitt von S mit ε hindurchgeht.

Von *A. Brambilla*, Nap. Rend. (3) 4 (1898), p. 19, rührt die Reziprozitätseigenschaft her: „Berührt eine Ebene η die L_ε, so berührt auch ε die L_η." Weiter dehnt *Brambilla*, ebenda p. 300, den *Lie*schen Satz auf *„Steiner*sche zweidimensionale Flächen" im S_4 und S_5 aus.

D. Montesano, Nap. Rend. (3) 5 (1899), p. 88, fragt nach den näheren Beziehungen zwischen den beiden Flächen S und L_ε, sowie nach den Gebilden, die bei Variieren der Ebene ε von den Doppelgeraden, dem d_3 und den Doppelberührebenen der L_ε beschrieben werden. Zu dem Behuf geht *Montesano* aus von einer F_3 und der zu ihr in bezug auf einen festen Punkt P „harmonischen" kubischen Fläche H_3, dem Ort der drei vierten harmonischen Punkte in bezug auf je zwei der drei Schnittpunkte von F_3 mit einer durch P gehenden variierenden Geraden. (S. auch Nr. **12**, Note 45a.) Besitzt im besonderen die F_3 vier d_2, ist also die Reziproke zu S, so findet das nämliche für die H_3 statt.

Dualistisch ist danach bei gegebener Ebene ε jeder S eine zweite, eben die L_ε, assoziiert, womit der *Lie*sche Satz durchsichtig bewiesen ist. Bewegt sich ε, so beschreiben die Doppelgeraden von L_ε die vier singulären linearen Komplexe, die jene Geraden zu Achsen haben, während der d_3 den ganzen Raum doppelt beschreibt; die Doppelberührebenen von L_ε entsprechen sich in einer gewissen (nicht involutorischen) *Cremona*schen Transformation.

Andere Erweiterungen finden sich bei *C. Rosati*, Tor. Ac. 35 (1900), p. 12

Der Ort der Pole der Sehnen einer auf S gelegenen C_4 in bezug auf die durch ihre Durchschnittspunkte gehenden C_2 von S ist wiederum eine S. Zerfällt die C_4 in zwei C_2, so zerfällt der Ort in die Ebenen der beiden C_2, und

eine S; berührt im besonderen ε die S, so reduziert sich der Ort auf eine F_2. Der Satz bleibt auch gültig, wenn die gegebene S in eine R-F_3 ausartet. Weitere Ergänzungen zu diesem Satze haben *G. Königs*, *A. Brambilla*, *D. Montesano* und *C. Rosati* geliefert.[50])

---

eine F_2; ist die C_4 im besonderen eine Asymptotenkurve auf S, so fällt der Ort mit S zusammen, u. a. m. Artet die S in eine R-F_3 aus, so erfahren diese Sätze entsprechende Modifikationen.

Als Beweisprinzip dient geeignete Projektion der im S_5 gelegenen zweidimensionalen „*Veronese*schen Fläche“ $F_4^{(2)}$: $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \lambda_1^2 : \lambda_2^2 : \lambda_3^2 : \lambda_2\lambda_3 : \lambda_1\lambda_3 : \lambda_1\lambda_2$, die zuerst von *G. Veronese*, Rom Ac. Linc. Mem. (3) 19 (1884), genauer untersucht worden ist.

Die Fläche S_ε läßt sich, wie Referent bemerkt, auch einfach invariant darstellen, wodurch zugleich ein neuer Beweis des *Lie*schen Satzes erbracht wird.

Sei S gegeben durch

$$\varrho\, x_i = c^{(i)}(\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t), \tag{1}$$

so ergeben sich die ∞^2, auf S gelegenen C_2, wenn man die λ_r, λ_s, λ_t ersetzt durch beliebige Linearformen einer Variabeln λ:

$$\lambda_r = \alpha_r\lambda + \beta_r, \tag{2}$$

mit $u_r = (\alpha\beta)_{st}$. Damit gehe (1) über in:

$$\varrho\, x_i = f_i(\lambda) = a_i\lambda^2 + 2b_i\lambda + c_i. \tag{1'}$$

Für die Schnittpunkte λ_1, λ_2 einer solchen C_2 mit einer Ebene (ε) hat man:

$$\lambda^2(\varepsilon a) + 2\lambda(\varepsilon b) + (\varepsilon c) = 0, \tag{3}$$

oder auch, für $\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = \lambda_1\lambda_2 : \lambda_1 + \lambda_2 : 1$,

$$\sigma_2 : \sigma_1 : \sigma_0 = (\varepsilon c) : -2(\varepsilon b) : (\varepsilon a). \tag{3'}$$

Nun hat der Pol $P'(x')$ von (ε) bez. C_2 die Koordinaten:

$$\varrho\, x_i' = a_i\sigma_2 + b_i\sigma_1 + c_i\sigma_0. \tag{4}$$

Setzt man hier die Werte der σ aus (3) ein, und ordnet nach den ε_i, so erhält man für den Ort der Pole P' von (ε) bez. aller C_2 auf S:

$$\varrho\, x_r' = \eta_{ir}\varepsilon_i + \eta_{kr}\varepsilon_k + \eta_{lr}\varepsilon_l + \eta_{mr}\varepsilon_m \qquad (r = i, k, l, m). \tag{I}$$

Hier bedeutet η_{rs} die in den Koeffizienten bilineare, in den Variabeln u quadratische Kontravariante der Formen $c^{(r)}$ und $c^{(s)}$. (Für $r = s$ wird η_{rr} die Klassenform von $c^{(r)}$.) Dann ist (I) die Darstellung von S_ε.

Das Beweisprinzip ist ersichtlich ausdehnbar auf den Raum S_n, sowie auf Formen $c^{(i)}$ höheren Grades und in mehr als drei λ-Parametern.

Es genüge etwa die Betrachtung der Fläche F im S_3:

$$\varrho\, x_i = c^{(i)}(\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t), \tag{1a}$$

wo jetzt die $c^{(i)}$ kubische ternäre Formen der Parameter seien. Bei der Abbildung von F auf die λ-Ebene entspricht den ebenen Schnitten von F ein Gebüsch kubischer Kurven c_3. Die Ordnung von F ist daher im allgemeinen gleich 9, erniedrigt sich aber je um eine Einheit bei jeweiligem Auftreten eines Grundpunktes A des c-Gebüsches. [Für sechs G ergibt sich die F_3 (Nr. 11), für fünf G die F_4 mit C_2 (Nr. 16)]. Den ∞^2 Geraden der λ-Ebene entspricht jetzt eine ∞^2-Schar von C_3 auf F. Sucht man wieder den Ort der Pole (Nullpunkte) $P'(x')$ einer festen Ebene (ε) in bezug auf alle C_3 und verfährt im übrigen wie oben bei der S, so gelangt man zu einer, formal mit (I) übereinstimmenden Darstellung des

Von *G. Darboux*[50a]) rührt der Satz her, daß die F mit ∞^2 C_2 R-F_3 oder S sind, von *E. Picard* der allgemeinere, daß S und die rationalen, d. i. auf eine Ebene eindeutig abbildbaren R-F die einzigen F sind, deren ebene Schnitte rational sind. Weitere Verallgemeinerungen treten bei *G. Castelnuovo* auf.

14. Regelflächen 3. Ordnung und ihre Abbildung. Die Cayleysche Fläche. Eine allgemeine Regel-F_3 (R-F_3)[51]) entsteht als Ort der

---

Ortes der P'. Wiederum sind die $\eta_{rs} = -\eta_{sr}$ ($\eta_{rr} \equiv 0$) die in den Koeffizienten bilinearen, in den Variabeln u jedoch kubischen Kontravarianten von $c^{(r)}$ und $c^{(s)}$. Mithin ist der Ort der Pole P' ebenfalls eine Fläche $F = F_s$ vom Typus (1a) usf.

50a) *G. Darboux,* Bull. math. astr. (2) 4 (1880), p. 348; *E. Picard,* Par. Soc. ph. 1878, p. 127 (mit Andeutung eines Beweises); J. f. Math. 100 (1886), p. 71. *G. B. Guccia* findet eine Lücke im *Picard*schen Beweise und ersetzt ihn daher durch einen anderen, der auf einer Ausdehnung eines Satzes von *M. Noether,* Math. Ann. 3 (1871), p. 161, über F mit Scharen rationaler C beruht.

Allgemeinere Gesichtspunkte treten bei *G. Castelnuovo* auf. In einer ersten Arbeit geht er aus von Eigenschaften ebener c, die bei eindeutiger Transformation erhalten bleiben und untersucht daraufhin solche Familien von F, deren ebene Schnitte ein vorgegebenes Geschlecht p besitzen. Für $p \leq 2$ ergibt sich, daß solche F (unter gewissen Beschränkungen) rational sind; für $p = 0$ resultiert so der *Picard*sche Satz als Spezialfall. [Wegen der Fälle $p > 2$ vgl. *Castelnuovo,* Rom Linc. Rend. (5) 3_1 (1894), p. 59, 473, und *F. Enriques,* ebenda p. 281.]

Andererseits ordnet *Castelnuovo,* Rom Linc. Rend. (5) 3_1 (1894), p. 22, die Sätze von *Darboux* und *Picard* dem allgemeineren unter, wonach die irreduzibeln F, die von Ebenen in einem ∞^2-Systeme reduzibler C geschnitten werden, R-F oder S sind. Vgl. auch *G. Fano,* In Mem. *d'Ovidio,* 1918, p. 342. Auf den S_n hat den *Picard*schen Satz *E. H. Moore* ausgedehnt, Amer. J. Math. 10 (1887), p. 27. Weitere Literatur über S bei *„Timerding"*, p. 872 ff.

51) *M. Chasles,* Paris C. R. 53 (Nov. 1861), p. 884, wo die Kurven auf der Fläche kurz studiert werden und bereits auf die nach *Cayley* benannte R-F_3 hingewiesen wird (s. auch Nr. 4, Note 13); *Cayley,* London Trans. 154 (1864), p. 559 = Papers 5, p. 201; besonders eingehend bei *Cremona,* Ist. Lomb. A. 2 (Febr. 1861), p. 291; J. f. Math. 60 (1862), p. 313. Vgl. noch die zusammenfassenden Darstellungen von *Em. Weyr,* Geometrie der räuml. Erzeugnisse, Leipzig 1870, und *B. Klein,* Diss. Straßburg 1876. — Von neuerer Literatur sei noch folgendes erwähnt: *F. C. Ferry,* Arch. for Mat. Nat. 21 (1899), p. 1, untersucht für die allgemeine R-F_3 die Flächen niedrigster Ordnung, die durch eine vorgelegte C_n auf der Fläche gehen. Die residualen Schnitte lassen sich so wählen, daß sie nur aus Geraden der R-F_3 bestehen. Es wird auch die Parameterdarstellung des Textes (wenn auch nicht so einfach und durchsichtig, wie im Texte) abgeleitet [vgl. *Parrod,* Rev. math. spec. 17 (1907), p. 201], u. a. m. In einer anschließenden Arbeit, Amer. J. 23 (1901), p. 179, löst *Ferry* die analogen Aufgaben für die *Cayley*sche R-F_3; vgl. hinsichtlich der Parameterdarstellung *G. Cotty,* Nouv. Ann. (4) 8 (1908), p. 337; Rev. math. spec. 20 (1910), p. 533, 576. — Gewisse autokollineare R-F_3 untersucht *A. del Re,* Torino Atti 22 (1887), p. 901; Napoli Rend. (2) 1 (1887), p. 167.

F. M. Dumont, Soc. math. fr. Bull. 25 (1897), p. 74, zeigt, daß die R-F_3, einschließlich der *Cayley*schen, autopolar sind in bezug auf gewisse F_2. (Außer

Verbindungsgeraden („Erzeugenden") der Punktepaare (μ, λ) zweier windschiefer Geraden d, e, die durch eine (1, 2)-deutige Korrespondenz $f^{(1)(2)}(\mu, \lambda) = 0$ verbunden sind. Jedem Punkte μ der „Doppelgeraden" d entsprechen zwei Punkte λ auf der einfachen Leitgeraden („Begleitgeraden") e, während umgekehrt jedem Punkte λ von e nur ein Punkt μ auf d entspricht. Die λ-Punktepaare bilden auf e eine Involution, deren Doppelelemente die Treffpunkte der beiden Doppelerzeugenden sind.

Da die Verwandtschaft $f(\mu, \lambda) = 0$ durch fünf beliebig gegebene Wertepaare (μ_i, λ_i) eindeutig bestimmt ist, so ist eine R-F_3 durch zwei windschiefe Gerade d, e und fünf ihrer Transversalen eindeutig festgelegt; sie hängt von 13 Konstanten ab. Die stereometrische

diesen Flächen erfreuen sich nur noch die F_3 mit drei biplanaren d_2 der genannten Eigenschaft.)

F. Severi, Ven. Ist. Atti 62 (1903), p. 65, untersucht, welche Typen der allgemeinen und *Cayley*schen R-F_3 einseitig und welche zweiseitig sind. Zu dem Behuf wird die Fläche auf eine zur Doppelgeraden senkrechte Ebene senkrecht projiziert. Es ergeben sich 19 verschiedene Typen; sieben derselben, darunter zwei *Cayley*sche, sind einseitig.

A. S. Gale, Amer. Math. Soc. Bull. (2) 10 (1904), p. 188, erhält (nebst zwei weiteren speziellen Typen von F_3) die *Cayley*sche R-F_3 als Doppeltranslationsfläche von C_3 (s. auch Nr. **23**, Note 109).

J. Krames, Wien Ber. 127 (1918), p. 563, untersucht die Striktionslinie der (E_∞ nicht berührenden) R-F_3; diese sind im allgemeinen gewisse C_8, wie schon *A. Adler,* Wien Ber. 85 (1882), p. 369 erkannt hatte. Für eine beliebige algebraische Regelfläche kann die Striktionslinie nur so zerfallen, daß sie aus einer irreduzibeln Kurve, der „eigentlichen Striktionslinie", und aus Geraden der Fläche besteht. Im besonderen ergibt sich, daß es nur eine einzige (E_∞ nicht berührende) R-F_3 gibt, deren eigentliche Striktionslinie eine C_2 ist, die dann von selbst eine Ellipse ist. Diese R-F_3 läßt sich durch eine spezielle projektive Zuordnung zwischen den Punkten eines Kreises und seiner Achse erzeugen.

Die Bilder der Haupttangentenkurven der R-F_3 sind durch den *Darboux*schen Satz (Note 49b) erledigt. Zu den Eigenschaften der Haupttangentenkurven selbst liefern Einzelbeiträge: *R. Nicodemi,* Giorn. di mat. 2 (1883), p. 270; *V. Snyder,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 5 (1891), p. 343; *G. Pittarelli,* Rom Linc. Rend. (4) 7 (1891), p. 452; Giorn. di mat. 32 (1894), p. 14; Lomb. Ist. Rend. (5) 12 (1894), p. 111, 148, 222; *G. Frauenfelder,* Diss. Zürich 1903. Liniengeometrisch behandeln die R-F_3: *J. Plücker,* Ann. di mat. (2) 1 (1869), p. 169, und vor allem *A. Voss,* Math. Ann. 8 (1874), p. 54; ebenda 12 (1876), p. 485. Hier werden mit Vorteil die *Klein*schen Komplexkoordinaten x_i (mit $\sum x_i^2 \equiv 0$) verwendet. Die R-F_3 erscheinen hier übrigens nur als Spezialfall der R-F_n, vgl. die allgemeine Theorie der R-F bei *C. Segre,* Math. Ann. 30 (1887), p. 202; ebenda 34 (1889), p. 1, und das Werk von *K. Zindler,* Liniengeometrie, Bd. 2, Leipzig 1906, den Art. *K. Zindler,* Algebraische Liniengeometrie, Nr. **50**, sowie auf das Werk von *E. Bertini,* Geometria projettiva . . ., Pisa 1987. — Die x_i legt auch *J. de Vries* der R-F_3 zugrunde, Néerl. Kongr. 1912, p. 145. Wegen des Sonderfalles des Zylindroides s. Nr. **24**.

Grundfigur ist dieselbe, wie die einer „Fünf“ g_i $(i = 1, \ldots, 5)$ einer F_3 (Nr. **11**) mit ihren beiden Transversalen t_1, t_2.

In der Tat besteht ein einfacher Zusammenhang. Durch jene sieben Geraden geht noch ein Büschel von F_3, deren Einzelindividuum durch eine achte Gerade h, die drei beliebig herausgegriffene g_1, g_2, g_3 der „Fünf“ trifft, festgelegt werden kann. Gleitet die Gerade h an den drei Geraden g_1, g_2, g_3 entlang, und rückt im Grenzfalle gegen eine der beiden Transversalen, etwa t_1, so geht die F_3 über in die R-F_3, mit t_1 als Doppelgeraden, t_2 als Begleitgeraden und den fünf Geraden g als Erzeugenden.

Aus der Erzeugung der R-F_3 — oder auch aus ihrer schiefen Projektion (Nr. **11**), indem man als Grundgerade zwei windschiefe Erzeugende nimmt, und durch d (resp. e) die Projektionsebene Π legt — fließt die Abbildung der R-F_3 nach *Clebsch*schem Muster.

Der Gesamtheit der ebenen Schnitte R_3 (mit d_2 auf d) entspricht in der Bildebene ein Gebüsch von c_2 mit festem Grundpunkt (Fundamentalpunkt) A_1.

Die Abbildung erscheint also auch als Spezialisierung von der der *Steiner*schen Fläche S (Nr. **13**). Die Doppelbedingung, daß das dort beliebig gelassene c_2-Gebüsch einen Grundpunkt erhält, ist für die S damit gleichwertig, daß sich von ihr eine Ebene (Doppelebene) abspaltet und die S so in eine R-F_3 ausartet; dabei artet die eine Schar der von den Tangentialebenen der S ausgeschnittenen C_2 in Gerade aus, eben die Erzeugenden der R-F_3, während die drei Doppelgeraden in eine einzige koinzidieren.

Ein Gebüsch von c_2 mit Grundpunkt A_1 läßt sich auffassen als die Gesamtheit der durch A_1 gehenden c_2, die zu einem festen Klassenkegelschnitt γ_2 apolar sind. Legt man von A_1 die beiden Tangenten t_1, t_2 an γ_2, mit den Berührungspunkten A_0, A_2, so daß die Gerade $p = (A_0, A_2)$ die Polare von A_1 ist, so drückt sich die Apolarität einfach dadurch aus, daß jede c_2 die Gerade p in einem zu (A_0, A_2) harmonischen Punktepaare (A, A') trifft; der Kegelschnitt γ_2 ist also durch das Punktepaar (A_0, A_2) ersetzbar.

Das Bild der Begleitgeraden e ist der Fundamentalpunkt A_1, insofern jedem Linienelement auf e ein Linienelement durch A_1 entspricht. Die Geraden durch A_1 sind die Bilder der Erzeugenden der R-F_3 und die Gerade p ist das Bild der Doppelgeraden d, insofern jedem Punkt von d eines der obigen Punktepaare auf p entspricht, deren Involution mit der der λ-Punktepaare auf e übereinstimmt. Endlich sind die beiden Geraden $t_0 = (A_1, A_2)$, $t_2 = (A_1, A_0)$ die Bilder der beiden Doppelerzeugenden.

Ein ebener Schnitt der $R\text{-}F_3$ kann nur auf drei Arten zerfallen in: $\alpha)$ $g + C_2$, $\beta)$ $g + d$, $\gamma)$ $g + g' + e$ (wo g und g' inzident sind).

Entsprechend zerfällt die Bild-c_2 in eine c_1 durch A_1, und überdies $\alpha)$ eine beliebige c_1', $\beta)$ die Gerade p, $\gamma)$ eine zweite zu c_1 konjugierte Gerade c_1' durch A_1.

Hieraus folgt auch die Erzeugung der Fläche durch eine Gerade g, die an zwei windschiefen Geraden d, e und einer C_2, die d einmal trifft, entlang gleitet. Der Vorteil der Abbildung tritt weiter deutlich hervor bei der Diskusion der Schnitte der $R\text{-}F_3$ mit anderen Flächen, da die Anzahl der möglichen Ansätze bei der Abbildung weit geringer ist als bei direktem Verfahren.

Es genüge die Aufzählung der Schnitte C_6 der $R\text{-}F_3$ mit einer (eigentlichen) F_2. Die Einteilung in Klassen geschieht nach der Vielfachheit des Zerfallens der Bild-c_4; die entsprechende Einteilung nach der Vielfachheit des Zerfallens der C_6 selbst kann sofort daraus entnommen werden.

Erster Typus:

A) *Allgemeine nichtzerfallende* c_4 $(p = 2)$ mit d_2 in A_1; auf der $R\text{-}F_3$ nicht zerfallende C_6 mit $2\,d_2$ auf d (den Schnittpunkten der F_2 mit d).

Dabei müssen sich die vier Schnittpunkte der c_4 mit der Geraden p in zwei Paare der Involution (A_0, A_2) zerlegen. [Diese Bedingung kommt im folgenden nur dann in Wegfall, wenn p einen Bestandteil der c_4 bildet.]

Sonderfall:

A_0) r_4 mit d_3 in A_1:
$C_6 = R_5 + e$.

Die R_5 hat ebenfalls $2\,d_2$ auf d; die C_6 entsteht, wenn man eine F_2 durch e legt.

Zweiter Typus:

B) *Die* c_4 *zerfällt in zwei* (eigentliche) *Teilkurven.*
Man hat zwei Untertypen: B_1) $c_4 = c_3 + c_1$; B_2) $c_4 = c_2 + c_2'$.

Erster Untertypus. B_1) $c_4 = c_3 + c_1$.

Unterfälle:

$B_{1,a}$) Die c_3 $(p = 1)$ geht durch A_1, desgleichen c_1:
$C_6 = C_5\,(p = 1) + g$.
Die C_5 hat einen d_2 auf d.

$B_{1,b}$) r_3 mit d_2 in A_1, nebst beliebiger c_1:
$C_6 = R_4 + C_2$ (Schnitt mit einer F_2 durch eine C_2).
Die R_4 hat einen d_2 auf d.

Hiervon sind wiederum Spezialfälle:

$B_{1,b'}$) Die c_1 fällt mit p zusammen:
$C_6 = R_4 + d$ (Schnitt mit einer F_2 durch d).

$B_{1,b''}$) Auch c_1 geht durch A_1:
$C_6 = R_4 + g + e$ (Schnitt mit einer F durch g und e).

Zweiter Untertypus. B_2) $c_4 = c_2 + c_2'$. c_2 und c_2' gehen durch A_1:

$C_6 = C_3 + C_3'$ (Schnitt mit einer F_2 durch eine C_3).

C_3 und C_3' treffen sich dreimal, entsprechend den drei weiteren Schnittpunkten von c_2 und c_2'; überdies treffen aber C_3 und C_3' die Doppelgerade d in denselben beiden Punkten, entsprechend den beiden Punktepaaren von c_2 und c_2' auf p.

Dritter Typus:

C) c_4 zerfällt in die drei Teilkurven: $c_4 = c_2 + c_1 + c_1'$.
Unterfälle.

C_a) c_1 und c_1' (nicht konjugiert) durch A_1, c_2 beliebig:
$C_6 = R_4 + g_1 + g_2$ (Schnitt mit einer F_2 durch g_1 und g_2).
Es sind g_1 und g_2 windschief; die R_4 trifft d zweimal.

C_b) c_2 und c_1 durch A_1, c_1' beliebig:
$C_6 = g + C_2 + C_3$ (Schnitt mit einer F_2 durch eine g und C_2).
Hiervon sind wiederum Spezialfälle:

$C_{b'}$) $c_1' = p$:
$C_6 = g + C_3 + d$ (Schnitt mit einer F_2 durch g und d).

$C_{b''}$) Auch c_1' geht durch A_1, ist nicht konjugiert zu c_1:
$C_6 = g_1 + g_2 + e + C_3$ (Schnitt mit einer F_2 durch g_1, g_2 und e).
g_1 und g_2 sind windschief.

Vierter Typus:

D) c_4 zerfällt in vier Gerade: $c_4 = c_1 + c_1' + c_1'' + c_1'''$.
Unterfälle.

D_a) c_1 und c_1' (nicht konjugiert) durch A_1, c_1'' und c_1''' beliebig:
$C_6 = g_1 + g_2 + C_2 + C_2'$ (Schnitt mit einer F_2 durch g_1, g_2 und C_2).
g_1 und g_1 sind windschief.

Im besonderen können c_1'' und c_1''', und damit auch C_2 und C_2' zusammenrücken; dann berühren sich beide Flächen längs eines Kegelschnitts.

D_b) Eine der beiden Geraden c_1'' und c_1''', etwa die letztere, fällt mit p zusammen, während die erstere beliebig bleibt.

Es treten zwei Unterfälle ein, je nachdem c_1 und c_1' konjugiert sind oder nicht:

D_{b_1}) $C_6 = g + g' + d + C_2$ (Schnitt mit einer F_2 durch zwei inzidente Erzeugende g, g');

D_{b_2}) $C_6 = g + g_1 + d + C_2$ (Schnitt mit einer F_2 durch zwei windschiefe Erzeugende g_1, g_2, nebst d).

Beidemal kann wiederum auch c_1'' in p hineinfallen; dann artet auch die C_2 in d aus, und beide Flächen berühren sich längs d.

Endlich kann auch c_1'' durch A_1 gehen:

D_{b_3}) $C_6 = g_1 + g_2 + g_3 + d + e$ (Schnitt mit einer F_3 durch drei windschiefe Erzeugende g_1, g_2, g_3, oder auch durch die beiden Leitgeraden d, e).

Wählt man in der Bildebene A_1, A_0, A_2 als Koordinatenecken, andererseits das Koordinatentetraeder angemessen, so erhält die Gleichung der R-F_3 die Normalgestalt:

$$x_i x_m^2 = x_k x_l^2. \tag{5}$$

Bedeutet g_{rs} irgendeine Kante ($x_r = 0$, $x_s = 0$), so ist g_{im} die Doppelgerade d, g_{ik} die Begleitgerade e, während g_{il} und g_{km} die beiden Doppelerzeugenden sind. Führt man die Parameter $\frac{x_i}{x_k} = \mu$, $\frac{x_l}{x_m} = \lambda$ ein, so reduziert sich die frühere Korrespondenz $f(\mu, \lambda) = 0$ auf $\mu = \lambda^2$. Aus (5) folgt auch die Erzeugung der R-F_3 durch ein Ebenenbüschel und ein ihm projektiv zugeordnetes F_2-Büschel (Nr. 8) von der speziellen Beschaffenheit, daß es zwei Doppelebenen enthält. Mit Hilfe eines weiteren Parameters ν ergibt sich aus (5) die explizite Darstellung:

$$x_i : x_k : x_l : x_m = \lambda^2 : 1 : \lambda\nu : \nu. \tag{5'}$$

Man kehre jetzt zurück zur ursprünglichen Auffassung, wonach das c_2-Gebüsch in der Bildebene aus den c_2 mit Grundpunkt A_1 bestand, die zu einem festen Klassenkegelschnitt γ_2 konjugiert waren, an den von A_1 die Tangenten $t_1 = (A_1 A_2)$ und $t_2 = (A_0 A_2)$ gingen.

Man denke sich nunmehr den Fundamentalpunkt A_1 beweglich, er wandere etwa auf der (als reell angenommenen) Tangente t_2 entlang, so kann der Grenzfall eintreten, daß er mit A_0 koinzidiert (d. i. auf γ_2 rückt). Dann rückt entsprechend auf der R-F_3 die Begleitgerade e in die Doppelgerade d, und es ergibt sich als Normalgleichung für diesen Grenzfall:

$$x_i x_k x_m = x_i^2 x_i + x_k^3. \tag{5a}$$

Dann ist die Kante g_{ik} die Doppelgerade d, während g_{kl} eine beliebige Erzeugende g liefert. Legt man durch d das Ebenenbüschel $x_i = \lambda x_k$, so erhält man aus (5a): $\lambda x_m = x_i + x_k$, und damit die Darstellung aller Erzeugenden. Aus (5a) folgt auch die Erzeugung der Fläche durch ein Ebenenbüschel und ein ihm projektiv zugeordnetes F_2-Büschel (Nr. 8) von der speziellen Beschaffenheit, daß es eine Doppelebene enthält und von den zwei Doppelgeraden, in die seine Grundkurve zerfällt, die eine mit der Achse des Ebenenbüschels zusammenfällt. Mit Hilfe eines weiteren Parameters ν wird (5a) gleichwertig mit der expliziten Darstellung:

$$(5a') \qquad x_i : x_k : x_l : x_m = \lambda^2 : \lambda : \nu : \lambda\nu + 1.$$

Dies ist die *„Cayleysche Fläche"* (*Cayley*, Papers 5, bes. p. 211, 213, s. auch Nr. **4**, Note 13). Sie ist dadurch merkwürdig, daß sie, nach *S. Lie*[52]), abgesehen von den F_2 und den abwickelbaren Flächen, die einzige ist, die mehr als zwei unabhängige infinitesimale projektive Transformationen gestattet.

II. Systematischer Ausbau der Theorie.

15. Cremonas und Sturms Preisarbeiten. Kurven auf der Fläche. Hiermit schließt die erste Periode ab und eine zweite beginnt mit den, den Beweisen der *Steiner*schen Sätze gewidmeten Berliner Preisarbeiten von *Cremona*[53]) und *Sturm*[53]) (über letzteren s. auch Nrn. **6**, **8**, **10**); von da ab datiert erst eine systematische Theorie der F_3.

Bei *Cremona* erscheinen die bis dahin entdeckten geometrischen Sätze über die F_3 als Spezialfälle einer projektiven Theorie der F_n überhaupt (s. *„Salmon-Fiedler"*, Kap. I). Zwei Gesichtspunkte treten besonders hervor, einmal der der *Polargebilde*[54]), mit besonderer Anwendung auf die *Hesse*sche und *Steiner*sche Fläche — und im Anschluß daran, bei der F_3, auf das Pentaeder —, sodann, unabhängig davon,

52) *Lie* bei *Lie-Engel*, Transformationsgruppen, Bd. 3 (Leipzig 1893), p. 196. Vgl. die Ergänzungen von *F. Enriques*, Ven. Ist. Atti (7) 4 (1893), p. 1590; ebenda 5 (1894), p. 638, sowie die abschließende Arbeit von *Lie*, Leipzig Ber. 47 (1895), p. 209.

53) *Cremona*, J. f. Math. 68 (1867), p. 1—133; *Sturm* s. das Literaturverzeichnis. Auf die Arbeiten von *Cremona* und *Sturm* stützen sich insbesondere die Nrn. **16**, **18**—**21**. Ausführliche Inhaltsangaben findet man bei *„Salmon-Fiedler"*.

54) Auf die Polareigenschaften der Kernfläche der F_3, ihrer Knotenpunkte, reziproken Pole usf., wie sie besonders *Steiner*, *Clebsch*, *Cremona*, *Sturm*, *Reye* entwickeln, kann nur hingewiesen werden. Bezüglich der Ausartungen der Kernfläche vgl. *E. Ciani*, Rom Linc. Rend. (4) 6_1 (1890), p. 55; Ist. Lomb. Rend. 2 (26) (1892), p. 498, 523, 537; (2) 27 (1894), p. 222.

die *Erzeugung*[55]) gesuchter und gegebener Flächen und Raumkurven durch projektive, kollineare usw. Büschel, Netze usw. von Flächen geringerer Ordnung. Vgl. auch Nr. **21**.

Mit solchen Erzeugungen werden Abbildungen auf einfachere Grundgebilde organisch verknüpft, woraus die Geometrie *auf* der Fläche erwächst. Implizite bedienen sich *Cremona* und *Sturm* (wie auch „*Reye*") dabei des *Bézout*schen Eliminationssatzes und des *Gauß*schen Fundamentalsatzes der Algebra.

Bei „*Sturm*" werden zunächst die verschiedenen bis dahin aufgestellten Erzeugungsweisen der allgemeinen F_3, zugleich mit dem Nachweise ihrer $27\,g$, abgeleitet.

Sodann wird auf die Eigenschaften der F_3 hinsichtlich der auf ihr liegenden C niedrigster Ordnung eingegangen.

Es folgt die Betrachtung der Polarflächen der F_3, mit besonderer Anwendung auf die Kernfläche. Eingehend werden die Schnittkurven der F_3 mit einer F_2 und einer anderen F_3 diskutiert.

Nach Aufstellung einiger Hilfssätze über imaginäre Gebilde wird die Realität der $27\,g$ bei der allgemeinen F_3 festgestellt, an die sich die Einteilung der reellen F_3 in Gattungen anschließt.

Endlich wird auch das Auftreten von d_2 berücksichtigt.

Sturm[56]) hat weiterhin das ausgesprochene Bestreben, in Anlehnung an *H. Milinowski*[57]), in „rein geometrischer" Art die Erzeugungen der F_3 zu studieren und hierauf die Polareigenschaften der Fläche zu stützen.

Die Abbildung der F_3 (Nr. **11**) auf eine Ebene gewinnt *Cremona* auf dem *Graßmann*schen Wege, indem er, unter Vermeidung von Koordinaten, nach dem Vorgange von *Magnus* und *Hesse* (Nr. **1**), den Raumebenen eine Schar (Gebüsch) von F_3 mit gemeinsamer C_6 zuordnet, und verwendet sie für die Schnitte der F_3 mit F_2 und anderen F_3.

Darüber hinaus haben *Sturm*[58]) und *K. Rohn*[58]) allgemein die bei

---

55) Vgl. „*Sturm*", „*Reye*", sowie Nr. **21**.

56) *Sturm*, J. f. Math. 88 (1880), p. 213, wo auch die Kurven auf der F_3 „rein synthetisch" untersucht werden, vgl. auch Note 58. Vgl. „*Reye*", p. 96.

57) *Milinowski*, Ztschr. Math. Phys. 23 (1878), p. 85, 211; J. f. Math. 89 (1880), p. 136.

58) *Sturm*, Math. Ann. 21 (1883), p. 457; *Rohn*, Leipz. Ber. 46 (1891), p. 84. Die F_3 sind dadurch ausgezeichnet, daß bei ihnen die Restkurven niedrigster Ordnung stets zerfallen. — Auf Grund einer *Sturm*schen Erzeugung der F_3 (s. Nr. **9**, Note 26) untersucht die C_3 auf F_3 *W. Burnside*, Cambr. Phil. Soc. Proc. **15** (1911), p. 425. — Im Anschluß an seine Erzeugung der F_3 (Nr. **9**, Note 32) untersucht *G. Majcen* insbesondere die C_3 und C_4 auf der F_3, Agram Ak. 175 (1909), p. 87; 178 (1911). — Als Sonderfall allgemeiner Erscheinungen bei den

gegebener Ordnung und gegebenem Geschlecht auf der F_3 je existierenden Kurvenarten untersucht, ersterer mittels der schiefen Projektion (Nr. **11**), letzterer mittels der zugehörigen *Restkurven* niedrigster Ordnung, die sich gerade bei der F_3 besonders einfach gestalten. Ausgedehnte Tabellen lassen die Fruchtbarkeit dieser Methoden hervortreten.

16. Geisers Projektion der Fläche von einem ihrer Punkte aus. Segres Projektion vom S_4 aus. Der von einem Punkte P (außerhalb der F_3) an die F_3 gehende Tangentenkegel ist von der 6^{ten} Ordnung und besitzt 27 Doppelebenen, eben die, welche nach *Cayley* (Nr. 2) die 27 Geraden der F_3 projizieren. Die Fruchtbarkeit dieser Methode trat aber erst hervor, als *F. Geiser*[59]) das Projektionszentrum P auf die F_3 selbst rücken ließ; die Ordnung des Kegels, für den die in P zur F_3 gehörige Tangentialebene zur 28^{ten} Doppelebene wird, reduziert sich dann auf vier. Der ebene Schnitt des Kegels wird somit eine allgemeine c_4 (vom Geschlecht 3) mit 28 Doppel-

---

F_n verfolgt *A. B. Basset* singuläre C_n und Γ_n, besonders für $n = 3, 4$: Quart. J. 36 (1905), p. 359; 37 (1906), p. 106; 39 (1908), p. 334; 40 (1909), p. 210; 41 (1910), p. 24; 42 (1911), p. 225. — Mittels der Restkurven untersuchte die C auf F_3 auch *H. F. Baker,* London Math. Soc. Proc. (2) 11 (1912), p. 285. — Die systematischen Untersuchungen von *Sturm* und *Rohn* führt, unter Benutzung verschiedener Abbildungen der F_3, weiter *M. Piazzolla-Belloch,* Giorn. di mat. 50 [(3) 12] (1922), p. 47. — Büschel von R_n auf zweiteiligen[76a]) F_3 verfolgt *A. Wiman,* Skand. Kongr. Helsingfors 1922, p. 41.

59) *Geiser,* Math. Ann. 1 (1868), p. 129. Vgl. die weitere Ausführung bei *M. Zacharias,* Diss. Rostock 1903. Einer der Hauptsätze lautet: „Drei g der F_3 entsprechen dann und nur dann drei syzygetischen[62]) Doppeltangenten der C_4, wenn zwei von ihnen inzident sind, und die dritte entweder beide oder keine von ihnen schneidet." Weitere Ergänzungen finden sich bei *M. Lenz,* London Math. Soc. Proc. (2) 9 (1910), p. 205. — Die Umkehrung der *Geiser*schen Projektion läßt sich besonders verfolgen bei der *Klein*schen $c_4 \equiv c_4' \equiv x_i^3 x_k + x_k^3 x_l + x_l^3 x_i = 0$, die in der Theorie der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Funktionen, der endlichen Gruppen und ihrer Invarianten und der Gleichungen 6. Grades eine wesentliche Rolle spielt (s. z. B. *R. Fricke,* Algebra II, Braunschweig 1926). Man hat in der Identität $c_4 \equiv f_1 f_3 - f_2^2$ die Koeffizienten zu vergleichen, und für dieses System von Bedingungen eine möglichst einfache partikuläre Lösung zu finden. Eine solche ergibt sich in der Darstellung:

$$F_3' \equiv x_m^2 (x_i + x_k + x_l) + x_m (x_i x_k + x_k x_l + x_l x_i) + (x_l^2 x_k + x_k^2 x_l + x_l^2 x_i + x_i x_k x_l) = 0.$$

Diese F_3' ist sodann nach *Graßmann* (Nr. 7) zu erzeugen, wiederum vermöge einer geeigneten partikulären Lösung. Bildet man endlich die F_3' nach *Clebsch* (Nr. 11) auf die Ebene ab, so lassen sich die nichthomogenen Koordinaten der sechs Fundamentalpunkte A als siebente komplexe Einheitswurzeln darstellen. S. *W. Fr. Meyer,* München Ber. 1928, p. 143.

tangenten, und umgekehrt lassen sich zu gegebener c_4 zugehörige F_3 konstruieren.[59a])

Wählt man P als Koordinatenecke A_4, so lautet die nach x_4 geordnete Gleichung der F_3: $x_4^2 f_1 + 2x_4 f_2 + f_3 = 0$, wo f_i eine ternäre Form der x_1, x_2, x_3 vom Grade i bedeutet. Dann ergibt sich sofort die Gleichung des Kegels und damit auch seines Schnittes c_4 mit der Ebene $x_4 = 0$ in der Normalform: $c_4 \equiv f_1 f_3 - f_2^2 = 0$, aus der man abliest, daß sich die Tangentialebene $f_1 = 0$ der F_3 in A_4 als eine Doppeltangente der c_4 projiziert.

Die c_4 läßt sich auch auffassen als Grenzkurve der (1, 2)-deutigen Abbildung[60]) der F_3 auf die Ebene vermöge des Strahlenbündels P.

Hierdurch bereichern sich die Theorien der c_4 und F_3 gegenseitig, wobei zu beachten ist, daß die erstere [vgl. Art. III C 5a, *G. Kohn*[61]), *Ebene Kurven der dritten und vierten Ordnung*] schon seit längerer Zeit, sowohl von geometrischer Seite her, wie von analytischer, auf Grund der Theorie der *Abel*schen Funktionen vom Geschlecht 3, eingehend untersucht worden ist.

So übertragen sich[62]) die zahlreichen Sätze von *Steiner, Hesse* u. a.

59a) Hierbei wird es für die Theorie der elliptischen Modulfunktionen von Bedeutung, daß die Diskriminanten der F_3 und c_4 einander proportional werden, s. *F. Klein-R. Fricke,* Elliptische Modulfunktionen, Leipzig 1911. Geometrisch ist sofort ersichtlich, daß sich ein d_2 der F_3 in einen d_2 der c_4 projiziert, und vice versa.

60) *Clebsch,* Math. Ann. 3 (1870), p. 45, bes. § 8. Hier werden allgemein derartige mehrdeutige Abbildungen von Flächen im Zusammenhange mit den eindeutigen betrachtet, insbesondere die Beziehung zwischen der (1, 2)-deutigen Abbildung der F_3 und der eineindeutigen der Nr. **11**. Solche (1, 2)-Abbildungen von Flächen, besonders hinsichtlich der „Übergangskurve" sind verschiedentlich weiter verfolgt worden, so von *R. de Paolis,* Rom Linc. Rend. (3) 1 (1877), p. 136; *M. Noether,* Math. Ann. 33 (1889), p. 525; *M. Pieri,* Tor. A. 24 (1889), p. 514; *F. Enriques* und *G. Castelnuovo,* Soc. Ital. (3) 10 (1896), p. 201 u. 232; *A. Bottari,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 277. — Es sei noch bemerkt, daß auch die (1, 3)-Abbildung der F_3 auf die Ebene untersucht worden ist, s. *S. Kantor,* J. f. Math. 95 (1883), p. 147.

61) Insbesondere sei auf die Nummern hingewiesen: **59**. *Steiner*sche und *Hesse*sche Kegelschnitte; **71**. Die *Geiser*sche Erzeugung; **75**. Realitätsfragen. Wegen der Beziehungen der c_4' zu den *Abel*schen und Thetafunktionen vgl. etwa *W. Wirtinger,* Untersuchungen über Thetafunktionen, Leipzig 1895, sowie die Artt. II B 6, 7 von *A. Krazer* und *W. Wirtinger*.

62) In dieser Hinsicht sei noch hingewiesen auf den Unterschied zwischen den von drei Doppeltangenten der c_4 gebildeten *syzygetischen* resp. *asyzygetischen* Dreiseiten.[52]) [Über deren analytische Behandlung s. z. B. *G. Frobenius,* J. f. Math. 103 (1888), p. 139.] Im ersteren Falle liegen die sechs Berührungspunkte auf einer c_2, so daß der *Pascal*sche Satz gilt, und entsprechend auf der F_3; im letzteren Falle besitzen die Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten des Sechsecks die Eigenschaft, daß ihre Verbindungsgeraden mit den zugeordneten Ecken des

über die Lagerung der Doppeltangenten auf die Geraden der F_3. Der *Lürothsche* Satz (Nr. **11**, Note 34), daß die sechs Geraden einer Sechs als Tangentialebenen eines Kegels 2. Klasse projiziert werden, tritt jetzt in organische Beziehung zu den *Hesse*schen γ_2, die gewisse Gruppen von sechs Doppeltangenten der c_4 berühren.[62a])

Auf Grund seiner vorangehenden Untersuchung der verschiedenen Typen von c_4[63]) konnte nunmehr *H. G. Zeuthen* einen völligen Überblick[64]) über die Gestalten der singularitätenfreien F_3 geben; den von

Dreiseits inzident sind, und wiederum entsprechend auf der F_3. Vgl. *W. Franz Meyer,* Arch. Math. Phys. (3) 15 (1909), p. 258; *O. Degel,* ebenda 20 (1912), p. 87.

62a) Dabei empfiehlt es sich, im Anschluß an *Hesse,* Nr. **1**, Note 2, die 27 g der F_3 mit *Cayley* [J. f. Math. 68 (1867), p. 176] noch in anderer Weise zu bezeichnen, vgl. Art. *G. Kohn*[61]), sowie *R. Fricke,* Algebra II, Braunschweig 1926. Schon *Hesse,* J. f. Math. 49 (1855), p. 243, 279, hatte die 28 t_2 einer c_4 ($p = 3$) den 28 Verbindungsgeraden von 8 (assoziierten) Raumpunkten $(7, 8; i, k = 1, 2, \ldots, 6)$ zugeordnet. Da sich bei der *Geiser*schen Projektion eine der t_2, etwa $(7, 8)$, als Spur der Tangentialebene der F_3 im Projektionspunkt absondert, gestatten die 27 g der F_3, unter Auszeichnung einer Doppelsechs, z. B. (a_i, b_i) (s. Nr. **11**), die folgende Bezeichnung durch „Doppelindizes“:

$$a_i = (7, i), \quad b_i = (8, i), \quad c_{ik} = (i, k).$$

Danach lassen sich die Schemata für windschiefe und inzidente g der F_3, für die 36 Doppelsechsen und 45 Ebenen, die syzygetischen und asyzygetischen Dreiecke der t_2 usf., leicht umschreiben. Man beachte noch, daß sich sechs g der F_3 dann und nur dann in sechs, eine γ_2 berührende t_2 projizieren, wenn sie entweder eine Sechs bilden, oder aber eine „Doppeldrei“, das sind drei windschiefe g nebst ihren drei Transversalen. Hieraus wird ersichtlich, daß der Satz von *Hesse,* es gebe eine endliche Anzahl von Zwölferkomplexen der t_2, derart, daß 32 mal sechs von ihnen eine γ_2 berühren, auf einen Widerspruch stößt.

63) *Zeuthen,* Math. Ann. 7 (1874), p. 410. Weitere Ausführungen findet man bei *C. Crone,* Tiddskr. Mat. (3) 5 (1875), p. 161; Math. Ann. 12 (1877), p. 561; Tiddskr. Mat. (4) 1 (1877), p. 97; *Zeuthen,* Festschrift 1909, p. 27; *C. Hoßfeldt,* Ztschr. Math. Phys. 32 (1886), p. 1 (Realitätsdiskussion). — Bezüglich der Gestalten der c_4 sei auf den Art. *Kohn,* bes. Nrn. **52, 53** hingewiesen, sowie auf *R. Gentry,* On the formes of plane quartic curves, New York 1896; *O. Chisini,* Lomb. Ist. Rend. (2) 53 (1920), p. 591. — Den Zusammenhang der t_2 der c_4 mit *Cremona*transformationen des S_2 und S_3 untersucht *J. R. Conner,* Amer. J. Math. 38 (1916), p. 155. — Endlich sei auch noch der Zusammenhang der c_4 mit der *Kummer*schen F_4 erwähnt, vgl. *P. Roth,* Monatsh. Math. Phys. 18 (1907), p. 161, wo weitere Literatur; *F. Schottky,* J. f. Math. 146 (1916), p. 129.

64) *Zeuthen,* Math. Ann. 8 (1874), p. 1. Der Projektionspunkt auf der F_3 wird zweckmäßig an einer Stelle elliptischer Krümmung gewählt; vgl. die Ausführung im einzelnen bei *G. Herting,* Diss. München 1887. Für die Krümmung der F_3 ist zu beachten, daß nach *G. Bauer,* Münchn. Abh. 14 (1883), p. 1, die *parabolische* Kurve der F_3 zugleich die der Kernfläche ist.

Das Bild dieser parabolischen Kurve bei der Abbildung der Nr. **11** untersucht eingehend *H. H. Niesen,* Diss. Groningen 1910. Für den Fall des Auftretens von d_2 der F_3 s. *P. H. Schoute,* Amst. Versl. 15 (1907), p. 570.

Doppeltangenten der c_4 gebildeten Drei- und Vierseiten entsprechen in gewisser Weise aus Geraden der F_3 gebildete geschlossene Drei-, Vier- und Fünfseite. Insbesondere ordnen sich die fünf Realitätstypen der c_4 den fünf *Schläfli*schen Typen (Nr. 4) gegenseitig zu; der bei den früheren Abbildungen (Nr. 11) unzugänglich gebliebene fünfte Typus läßt sich jetzt leicht beherrschen. Überhaupt fällt durch die neue Abbildung auf die Ergebnisse von *Schläfli* und *F. Klein* (Nr. 17) ein neues Licht

Auf andere Art hat *C. Segre*[65]) durch eine Projektion vom S_4 aus die F_3 zugänglich gemacht, indem er sie, gewissermaßen anhangsweise, als Ausartungen von F_4' ansieht (vgl. auch Nr. 9).

Im S_4 seien zwei Über-F_2 vorgelegt:

$$F_2^{(4)} \equiv x_5^2 F_0 + x_5 F_1 + F_2 = 0, \quad G_2^{(4)} \equiv x_5^2 G_0 + x_5 G_1 + G_2 = 0,$$

deren Durchschnitt eine Mannigfaltigkeit M_4 bildet. Man projiziere die M_4 von einem zunächst außerhalb gelegenen Punkt P aus in einen S_3, so ergibt sich eine F_4 mit Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ und 16 Geraden. Die Eigenschaften dieser F_4 werden wesentlich auf Grund des Satzes entwickelt, daß sich im Büschel $(F_2^{(4)}, G_2^{(4)})$ fünf Überkegel befinden, die sich ausgezeichneter Polaritätseigenschaften erfreuen.

Die F_4 läßt sich wiederum in Analogie zum *Clebsch*schem Muster (Nr. 11) auf eine Ebene E mit fünf Fundamentalpunkten $A_i, \ldots, A_n$ abbilden, so daß den ebenen Schnitten der F_4 (d. s. c_4 mit zwei d_2 auf $\bar{C}_2$) ein Gebüsch von c_3 mit den fünf Grundpunkten A entspricht, d. i. die Gesamtheit der durch die A gehenden und zugleich zu einer festen γ_3 konjugierten c_3, und umgekehrt. Die 16 Geraden der F_4 ergeben sich aus dem *Clebsch*schen Schema einfach dadurch, daß man irgendeine Gerade (a_1) der F_3 nebst den zehn sie treffenden streicht. Dem Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ korrespondiert eine gewisse ausgezeichnete c_3'[66])

---

65) *Segre,* Math. Ann. 27 (1884), p. 313. Wegen weiterer Ergänzungen und Vereinfachungen vgl. noch *G. Veronese,* Ven. Ist. A. (6) 2 (1884), p. 1847; Math. Ann. 24 (1884), p. 313. — Die Klassengleichung einer F_4 mit $\bar{C}_2$ (sowie allgemein einer F_n mit einer $\bar{C}$) zerlegt *O. Chisini* in Faktoren, Rom Linc. Rend. (5) 26_1 (1917), p. 545. — Im übrigen sei bezüglich der ausgedehnten Literatur über F_4 mit $\bar{C}_2$ auf *„Timerding"*, p. 864ff. verwiesen, sowie auf: *L. Berzolari,* Ann. di mat. (2) 13 (1885), p. 102; *Reye,* Math. Ann. 55 (1902), p. 257; *H. F. Baker,* London Math. Soc. Proc. (2) 11 (1912), p. 285; *V. H. Rao,* ebenda (2) 17 (1919), p. 272. *Rao* verweist in diesem Zusammenhange noch auf eine Monographie von *Jessop* (1916) über F_4 (s. Literaturverzeichnis), die dem Referenten unzugänglich war und auch in den „Fortschritten der Math." nicht angezeigt worden ist.

66) Die Eigenschaften dieser Bildkurve c_3' von $\bar{C}_2$ sind von besonderem Interesse. Auf Grund der Tatsache, daß die Koeffizienten jeder c_3 des Gebüsches,

des c_3-Gebüsches derart, daß die Verbindungsgeraden der Punktepaar der c_3', die die Bilder der Punkte der $\overline{C}_2$ sind, durch einen festen Punkt der c_3' laufen.

Wählt man das Projektionszentrum P als die Koordinatenecke $(x_1 = 0, \ldots, x_4 = 0)$, so ergibt sich die Gleichung der F_4 als Resultante der obigen Gleichungen $F_2^{(4)} = 0$, $G_2^{(4)} = 0$ bzw. x_5:

$$F_4 \equiv (F_0 G_1 - F_1 G_0)(F_1 G_2 - F_2 G_1) - (F_0 G_2 - F_2 G_0)^2 = 0,$$

die die $\overline{C}_2$ als Schnitt der Ebene $F_0 G_1 - F_1 G_0 = 0$ mit der Fläche 2. Ordnung $F_0 G_2 - F_2 G_0 = 0$ erkennen läßt.

Läßt man nunmehr im besonderen mit *Segre* den Punkt P auf die M_4 selbst rücken, so daß die Konstanten F_0, G_0 verschwinden, also die obigen Gleichungen sich reduzieren auf

$$F_2^{(4)} \equiv x_5 F_1 + F_2 = 0, \quad G_2^{(4)} \equiv x_5 G_1 + G_2 = 0,$$

---

also auch jeder zerfallenden, an ein und dieselbe lineare Relation gebunden sind, läßt sich sofort eine ganze Reihe weiterer Punkte der c_3' angeben.

Zum Kegelschnitt $B_p(A_i, \ldots, A_n)$ gehören als Ergänzungskurven ein Büschel von c_1 mit einem Grundpunkte B' auf der c_3', der eben der Träger der Involution der Punktepaare ist, die den Punkten von $\overline{C}_2$ korrespondieren. Zu jeder der 15 Geraden c_{ik} gehört als Ergänzung ein c_2-Büschel, dessen Grundpunkte A_l, A_m, A_n und ein weiterer Punkt C_{ik}' auf c_3' sind.

Endlich gehört zu jedem der fünf Punkte A_i ein Büschel von r_3 mit d_2 in A_i, einfach durch $A_k, \ldots, A_n$ gehend, dessen drei weitere Grundpunkte A_i', U_i, U_i' ebenfalls der c_3' angehören, derart, daß (A_i, A_i'), (U_i, U_i') Paare der Involution sind.

Auf der so bestimmten c_3' schneidet die Tangente in B' einen Punkt B aus, der zugleich der Restpunkt des Kegelschnitts B_p ist. Schneidet ferner die Gerade (B', C_{ik}') den Punkt C_{ik} aus, so tritt dieser zugleich als Restpunkt der Geraden $c_{ik} = (A_i, A_k)$ auf.

Diese Verhältnisse auf c_3' werden durchsichtiger, wenn man auf der c_3' ein elliptisches Integral erster Gattung u als Parameter (Argument) ausbreitet (vgl. Art. *Kohn*, Nr. **21**). Sind dann bei geeigneter Normierung u_i die Parameter der Punkte A_i und setzt man $s = \sum u_i$, so gehört dem Involutionszentrum B' das Argument $\frac{s}{2}$ zu, und die Punktepaare (u, u') der Involution sind an die Relation gebunden: $u + u' \equiv -\frac{s}{2}$ mod. Per.

Umgekehrt kann man von einer beliebig gegebenen c_3' als Bild von $\overline{C}_2$ ausgehen und auf ihr fünf Punkte $A_i(u_i)$ markieren, deren Verbindungskegelschnitt B_p den Restpunkt $B\,(-s)$ ausschneide.

Von B aus lassen sich vier Tangenten (B, B') an die c_3' legen; sollen die weiteren Punkte reell ausfallen, so darf B nicht dem Ovale von c_3' angehören. Wählt man eine der reellen Tangenten (B, B') aus, so hat man damit das Involutionszentrum $B'\left(-\frac{s}{2}\right)$ und weiter, in Umkehrung der obigen Reihenfolge, vermöge der zehn Restpunkte C_{ik} die zugehörigen C_{ik}', und vermöge der fünf Punkte A_i die zugehörigen A_i'.

so spaltet sich die Ebene von $\overline{C}_2$ ab, und es resultiert eine F_3: $F_1 G_2 - F_2 G_1 = 0$ in der *Salmon*schen Normalform (Nr. 2). Dem entspricht, daß das c_3-Gebüsch in der Bildebene E jetzt einen sechsten Grundpunkt A_p erhält, womit die Beziehung zu einer γ_3 wegfällt.

Das Verfahren von *Segre* läßt noch eine andere instruktive geometrische Deutung zu.

Eine $F_2^{(4)}$ im S_4 bilde man stereographisch ab[67]) durch Projektion von einem auf ihr gelegenen Punkte auf einen S_3, ganz wie früher eine F_2 im S_3 (Nr. 11). Die Abbildungsformeln sind von der Gestalt $\varrho x_i = \varphi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ $(i = 1, \ldots, 5)$, wo die φ_i quaternäre quadratische Formen der vier (homogenen) Parameter λ bedeuten, mit der Besonderheit, daß die Gleichung $\sum a_i \varphi_i = 0$ eine lineare ∞^4-Schar von F_2 mit einem gemeinsamen Grundkegelschnitt C_2' darstellt. Dabei entsprechen den Geraden der $F_2^{(4)}$ die Geraden im S_3, die C_2' treffen, insbesondere also den durch irgendeinen festen Punkt P_0 der $F_2^{(4)}$ gehenden Geraden der $F_2^{(4)}$ die Erzeugenden des Kegels, der die C_2' vom Bildpunkt P_0' aus projiziert. Dem Schnitte M_4 der $F_2^{(4)}$ mit irgendeiner anderen Über-F_2, $G_2^{(4)}$, — oder auch dem von P_0 ausgehenden Projektionskegel der M_4 — korrespondiert dann im S_3 eben wieder eine F_4 mit dem Doppelkegelschnitt C_2', die sich auf eine F_3 reduziert, sobald P_0 der M_4 angehört, d. h. auch die $G_2^{(4)}$ den Punkt P enthält.

Das *Segre*sche Verfahren, soweit es die F_3 betrifft, ist also auch

67) Es ist nützlich, die in diesem Art. zur Verwendung kommenden eindeutigen Flächenabbildungen kurz zusammenzustellen.

Die stereographische Projektion einer F_2 (im S_3) auf eine Ebene E führte auf zwei Fundamentalpunkte A, B; dem Schnitte C_{2n} der F_2 mit einer F_n entsprach eine c_{2n} mit d_n in A und B (Nr. 11).

Zur *Steiner*schen Fläche S gehörte ein zu einer festen γ_2 konjugiertes c_2-Gebüsch; einer C_{4n} (S, F_n) korrespondierte eine c_{2n} (Nr. 13).

Der Regelfläche R-F_3 entsprach der besondere Fall, wo dieses c_2-Gebüsch einen Grundpunkt A besitzt; das Bild einer C_{3n} (Schnitt mit einer F_n) ist eine c_{2n} mit d_n in A.

Der *Cayley*sche Grenzfall resultierte, wenn A auf die γ_2 rückt (Nr. 14).

Die *Clebsch*sche Abbildung der F_3 ergab ein c_3-Gebüsch mit sechs Grundpunkten $A_1, \ldots, A_p$; das Bild einer C_{3n} (F_3, F_n) war eine c_{3n} mit d_n in den A (Nr. 11).

Die analoge Abbildung einer F_4 mit Doppelkegelschnitt $\overline{C}_2$ gehörte zu einem Gebüsch von c_3 mit fünf Grundpunkten $A_1, \ldots, A_n$, wo die c_3 zu einer festen γ_3 konjugiert waren. Das Bild einer C_{4n} (F_4, F_n) ist eine c_{3n} mit d_n in den A (Nr. 16).

Endlich im S_4 hat man die oben im Texte behandelte stereographische Abbildung einer $F_2^{(4)}$ auf eine ∞^4-lineare Schar von F_2 im S_3 mit Grundkegelschnitt C_2'; das Bild einer M_{2n} $(F_2^{(4)}, F_n^{(4)})$ ist eine F_{2n} mit $n$fachem Kegelschnitt C_2'.

als eine simultane stereographische Projektion zweier Über-F_2 von einem gemeinsamen Punkte aus anzusehen.

Hinsichtlich der Realität sind bei der F_4 zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem der Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ ein- oder nullteilig ist. Im letzteren Falle wähle man in metrischer Auszeichnung $\bar{C}_2$ als den unendlichfernen (nullteiligen) Kugelkreis K (vgl. III AB 4a, *G. Fano, Analytische und synthetische Geometrie,* bes. Nr. 7). Dann wird das F_2-Gebüsch $\varphi_i = 0$ im Bildraume einfach das aller Kugeln, und die x_i werden die (überzähligen) *„pentasphärischen"*[68]) Koordinaten des Bildpunktes.

Die F_4 mit dem Doppelkegelschnitt K sind die *Zykliden,* und im Grenzfalle der F_3 ist diese eine *zyklische* (*zirkulare*)[68a]) (s. auch Nr. **23**).

17. Gestaltliche Verhältnisse der Fläche. Modelle. F. Kleins Auflösung von Knotenpunkten. Juels topologische Flächen 3. Ordnung. Um weitere Veranschaulichungen der F_3 anzureihen, so stellten *W. Fiedler*[69]) (1865) ein Stabmodell, und, auf Anregung von *Clebsch*, *Chr. Wiener* (1869) ein Gypsmodell der F_3 mit 27 reellen Geraden her.

Gestützt auf eine Reihe, auf seine Veranlassung von *F. Neesen* (1872) und *A. Weiler* (1873) verfertigter Modelle der F_3 mit vier reellen Knoten (s. Nr. **13**) wird von *F. Klein*[70]) zunächst bei gegebenen 27 reellen Geraden eine angenäherte Konstruktion des Pentaeders hergeleitet. Insbesondere wird die (auch in der Theorie der f_5[71]) auf-

---

68) Nach *G. Darboux,* Sur une classe remarquable . . ., Paris 1873; Principes de géom. analytique, Paris 1917. Vgl. die Ausführungen bei *F. Klein,* Höhere Geometrie, autogr. Vorlesungen, Göttingen 1892, 1, p. 98 ff., sowie das Werk von *E. Coolidge,* Circle and sphere, Cambridge 1916.

68a) Vgl. die Monographie von *J. Borgmeyer,* Pr. Duderstadt 1901. Eine zirkulare F_3 besitzt 40 Nabelpunkte, s. *S. Roberts* und *R. Townsend,* Ed. Times 19 (1874), p. 71. Sie liegen zu je 5 auf 16 Geraden.

69) *Fiedler,* Ztschr. Math. Phys. 14 (1869), II, p. 32. Berechnungen von Doppelsechsen und verwandten Konfigurationen für Modellzwecke finden sich bei *Cayley,* Quart. J. 10 (1869), p. 58 = Papers 6, 316; Cambridge Trans. 12 (1873), p. 366 = Papers 8, p. 366; *Cayley* (Modell einer Fläche S s. Nr. **13**), London Math. Soc. Proc. 5 (1874), p. 14; *P. Frost,* Quart. J. 18 (1881), p. 89; *W. H. Blythe,* Cambridge Proc. 8 (1895), p. 241; Quart. J. 29 (1897), p. 206; ebenda 32 (1900), p. 366; 34 (1902), p. 73. *B.* hat seine Untersuchungen zusammengefaßt in einer Monographie, Cambridge 1908 (s. das Literaturverzeichnis); *H. M. Taylor,* Cambridge Trans. 18 (1900), p. 375. — Es sei auch noch auf die Fadenmodelle von R_4 und P_4 (s. Nr. **11**) von *K. Rohn* hingewiesen: Deutsche Math.-Ver. 1 (1892), p. 43.

70) *Klein,* Math. Ann. 6 (1879), p. 551.

71) Denkt man sich eine Gleichung fünften Grades $f_5(x) = 0$ mit den Wurzeln $x_1, \ldots x_5$ vorgelegt, in der die Koeffizienten von x^4, x^3, x^2 zugleich verschwinden, so gelten die Relationen $\sum x = 0$, $\sum x^2 = 0$, $\sum x^3 = 0$; s. *F. Klein,*

tretende) „*Diagonalfläche*“ von *Clebsch*[72]) diskutiert, die die 15 Diagonalen der fünf Pentaedervierseite enthält, von der *Weiler*[73]) ein Modell hergestellt hatte.

Vor allem aber gelingt es *Klein*[70]), aus eben jener speziellsten F_3 durch den einfachen Prozeß des „*Verbindens*“ resp. „*Trennens*“ der in einem Knoten anstoßenden F_3-Äste, die fünf Arten von singularitätenfreien F_3 herzuleiten, des weiteren auch — mit eventueller Hinzunahme eines Durchganges durch einen biplanaren Knoten mit imaginären Hauptebenen — die sämtlichen „Arten“ von *Schläfli* (Nr. 4) mit reellen Knoten. Die Individuen ein und derselben Art lassen sich, ohne Grenzübergänge, durch Variieren der Koeffizienten der F_3-Form ineinander überführen.

Daraufhin untersuchte *C. Rodenberg*[74]) die Modifikationen, die das Pentaeder einer F_3 beim Auftreten von Singularitäten erleidet; er betrachtete auch umgekehrt die zu vorgegebenem Pentaeder zugehörigen F_3. Im Anschluß hieran ließ er (1881) eine Serie von 26 Gipsmodellen der F_3, teilweise mit ihrer Kernfläche, erscheinen.[75])

Ikosaeder, Leipzig 1884, p. 166. Deutet man die x als (überzählige) homogene Punktkoordinaten im S_3, so stellen die beiden Gleichungen $\sum x = 0$, $\sum x^3 = 0$ die Diagonalfläche F_3 dar, deren Pentaeder also zu einem symmetrischen („regulären“) wird (s. Nr. 3). Schneidet man die F_3 mit einer Pentaederebene, etwa $x_5 = 0$, so läßt sich die Gleichung des Schnittes in die Form setzen:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \equiv 3(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = 0,$$

d. h. der Schnitt zerfällt in die drei Diagonalen des x_5-Vierseits: $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$ usf.

72) *Clebsch*, Math. Ann. 4 (1871), p. 284. Vgl. *E. Ciani*, Rom Linc. Rend. (9) 7_1 (1891), p. 227; Palermo Rend. 21 (1906), p. 322. Die Geraden g der Diagonalfläche werden genauer untersucht von *Ch. Bioche*, Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 111. Als eine F_3 mit einer endlichen Anzahl von Kollineationen in sich erscheint die Diagonalfläche bei *K. Bobek*, Monatsh. Math. Phys. 10 (1892), p. 122, 307. Im Zusammenhange mit einem räumlichen Fünfeck untersucht die Diagonalfläche *A. Grüttner*, Diss. Breslau 1903, sowie *E. Ciani*, Palermo Rend. 21 (1906), p. 322. — Die Zerlegung der Fläche durch ihre 27 g verfolgt *F. Klein*, Gesamm. Abhandl. 2, Berlin, Nr. 35, Zusatz 2.

73) *Weiler*, Gött. Nachr. 1872, p. 402. Es sei hier auch auf den Begriff des „*Zusammenhanges*“ einer F_3 hingewiesen, den *Schläfli*, Ann. di mat. (2) 5 (1873), p. 289; 7 (1875), p. 193, für seine verschiedenen F_3-Arten bestimmt hat (vgl. Nr. 4). *Klein* zeigt, daß der Begriff des Zusammenhanges in projektivem Sinne einer gewissen Modifikation bedarf. Allgemeine Untersuchungen über die „Zusammenhangsgruppe“ und „Äquivalenz“ von Flächen mit reellen Singularitäten hat *A. Comessatti* angestellt, Ann. di mat. (3) 23 (1915), p. 215.

74) *Rodenberg*, Math. Ann. 14 (1878), p. 46. Ein Teil der Ergebnisse findet sich schon in der Diss. Gött. 1874.

75) *Rodenberg*, im Verlage von *Brill*, Darmstadt.

Neuerdings hat *Klein*[76]) in Gemeinschaft mit *H. Vermeil*, seine obigen Untersuchungen vervollständigt. Es blieb noch aufzuklären, wann der Durchgang eines konischen Knotens d_2 mit reellem Mantel durch einen biplanaren Punkt mit *reellen* Hauptebenen eine neue Flächenart liefert. Man gelangt *nur* bei der F_3 mit drei d_2 und einem „Stiel" zu einer neuen Art, wenn sich eine *ungerade* Anzahl der d_2 durch die biplanare Form ändert.

In allen anderen Fällen liefert, wie die genauere Untersuchung des Varierens der Koeffizienten lehrt, die Auflösung eines biplanaren d_2 nach der einen oder anderen Seite hin bei besonders symmetrisch gestalteten F_3 zwei Flächen, die durch Bewegung ineinander überführbar sind, also zu *derselben* Art gehören.

Die Verfolgung dieser symmetrischen Flächen hinsichtlich ihres Gesamtverlaufs führte *Vermeil* zu interessanten Figuren, die in der *Rodenberg*schen Modellserie[75]) fehlen.

Schon bei einfachen Singularitäten zeigt sich, daß spiegelsymmetrisch unterschiedene F_3 zwei *verschiedenen* Arten angehören.

Klein bedient sich zur Untersuchung der verschiedenen F_3-Arten noch einer anderen, elementareren Methode, der Projektion der Fläche von einem singulären Punkte aus. Die Art und Weise des Koinzidierens von Geraden der F_3, sowie der Windung der Tangentialebenen längs derselben erlaubt, alle Fragen nach den verschiedenen Gestaltenarten zu beantworten.

Es sei noch der Unterschied zwischen ein- und zweiteiliger F_3 betont; ein Trennungskriterium gibt *R. Sturm*[76a]) auf Grund der *Steiner*schen Erzeugung der F_3 durch ein F_2-Büschel und ein ihm projektiv zugeordnetes E-Büschel (Nr. 8) an. Zweiteilig sind nur die F_3 mit 3 reellen und 24 punktierten g.

Wir kommen jetzt zu den topologischen Untersuchungen von *C. Juel*, auf die wir ihres allgemeineren Charakters wegen etwas ausführlicher eingehen. *Juel*[77]) verfolgt überhaupt das Ziel, zu zeigen, wie Realitätseigenschaften algebraischer Gebilde von den mit ihnen verknüpften algebraischen Relationen (Gleichheiten und Ungleichheiten)

76) *Klein*, Gesamm. Abhandl. 2, Berlin 1921, herausgeg. von *R. Fricke* und *H. Vermeil*, Nr. 35, Zusatz 1. Die für die Anschauung nicht immer einfachen Abänderungsprozesse werden durch zahlreiche Zeichnungen erläutert.

76a) *Sturm*, J. f. Math. 153 (1923), p. 1. S. auch Nr. 15, Note 58.

77) *Juel*, Kjöb. Skr. 1899, p. 1: Kopenhagen Vid. Selsk. (7) 1 (1906), Nr. 6; Kjöb. Skr. (7) 1 (1907), p. 296; Deutsche Math.-Ver. 16 (1907), p. 196; Paris C. R. 152 (1910), p. 1219; Vid. Selsk. Skr. (7) 8 (1910), p. 365; Ber. 2$^{\text{ter}}$ skand. Math. Kongr. 1911, p. 91; Deutsche Math.-Ver. 22 (1913), p. 345; ebenda 24 (1915), p. 17; Danske Vid. S. 2 (1916), p. 277.

ganz unabhängig sind, vielmehr ihren Ursprung haben in Eigenschaften sehr viel allgemeinerer Funktionsklassen.

Den Ausgang (1906) bilden „geschlossene Kurven" c, die von einer Geraden höchstens in einer gegebenen Anzahl n von Punkten (der „*Ordnung*") geschnitten werden, wobei die Fälle $n = 2, 3, 4$ in erster Linie interessieren. Entsprechendes gilt für die „*Klasse*".[77a])

Andererseits gibt der „*Ordnungs-*" resp. „*Klassenindex*" die Minimalzahl der Schnittpunkte mit einer Geraden, resp. der von einem Punkte ausgehenden Tangenten an.

Als Grundlage gilt ein gewisses „*Korrespondenzprinzip*"[77b]), daß, wenn — unter gewissen Bedingungen — auf einer c eine (p, q)-Punktekorrespondenz vorliegt, $p + q$ Koinzidenzpunkte existieren.

Als Singularitäten der c werden zugelassen Doppelpunkte (d_2), Spitzen, Wendepunkte und „vorspringende" Punkte, nebst den dualistischen Geraden.

Über gemeinsame Punkte und Tangenten von zwei c_2 bestehen einfache Sätze. Ein Bogen einer c_n heißt „*elementar*", wenn er einen Teil einer c_2 ausmachen kann. Eine (geschlossene) c ohne vorspringende Punkte heißt „*vollkommen stetig*".

Eine c_3 ohne d_2 hat immer drei Wendepunkte; eine c_3 ohne d_2 und Spitzen kann aus drei elementaren Bögen zusammengesetzt werden.

Die wichtigsten c sind die c_4. Bei ihnen ist die Anzahl der Doppeltangenten gleich der Zahl der d_2, vermehrt um die halbe Zahl der Wendepunkte. Die d_2 zerfallen in solche „*erster Art*" oder „*zweiter Art*", je nachdem man von einem solchen keine oder aber zwei Tangenten an die c_4 legen kann. Daraufhin zerlegen sich die c_4 in vier Haupttypen.

Sodann[77]) wird auch die Klasse der c_3 und c_4 untersucht (1907). Die obigen Begriffe werden auf „Raumkurven C" — die aus elementaren Bögen 3. Ordnung zusammengesetzt werden — und „Flächen F" übertragen; für diese Gebilde werden besondere Existenzbeweise geführt.

Wurden bisher die c als gezeichnete „graphische" Gebilde angesehen, so werden sie jetzt[77]) (1907) auch als „*nichtanalytische*" Kurven definiert, in dem Sinne, daß die Form der ganzen Kurve durch keinen

---

77a) Es sei hier auch hingewiesen auf die Revision *v. Staudt*scher Sätze über topologische c durch *G. Peano*, Torino Atti 26 (1890), p. 299, sowie auf gewisse Relationen zwischen Singularitäten bei *A. Kneser*, Math. Ann. 41 (1892), p. 319. — (Über topologische c_4 und c_5 mit der Maximalzahl von 3 resp. 6 d_2 s. Note 82.)

77b) Vgl. hierzu *H. Erlang*, Nyt Tiddskr. Mat. 17 B (1906), p. 58.

Teil von ihr bestimmt werden kann. Nunmehr werden allgemeine eindeutige Abhängigkeiten der Ebene eingeführt, die zu neuen Ergebnissen für die c führen.

Eine Raumkurve C_n ist eine solche, daß ihre Projektion auf eine Ebene eine c_m ($m \leqq n$) wird, wo n auch wirklich erreichbar ist.

Die erste Anwendung auf die F_3 betrifft zunächst die windschiefen[77]) (1910). Hier gilt der merkwürdige Satz, daß eine windschiefe F_3, ganz wie eine algebraische R-F_3, immer eine Doppelgerade d besitzt, während alle doppeltberührenden Ebenen durch eine zweite Gerade e gehen. Die allgemeine „$\overline{F}_3$“ wird als eine „*einfache*“[77c]) festgelegt (1910); man verstehe dabei allgemein unter einer einfachen Fläche eine stetige und in projektivem Sinn geschlossene, deren Berührungsebenen und Hauptkrümmungsradien sich stetig ändern. Die Ordnung n gibt, wie früher, die größte Anzahl n der Schnittpunkte mit einer Geraden an. Dann gilt für einfache $\overline{F}_3$ der Hauptsatz, daß immer *eine* Gerade auf ihr existiert, und, falls kein d_2 vorhanden, ein *Dreiseit* von Geraden. Durch eine Gerade g der Fläche gehen höchstens fünf Ebenen, die noch zwei weitere g ausschneiden. Die Zahl 27 ergibt sich als Maximalzahl für die g.

Juel spricht die Erwartung aus, daß sich die ganze Geometrie der Lage auf einer (algebraischen) F_3 ohne wesentliche Änderungen auf eine einfache $\overline{F}_3$ übertragen lasse. Vor allem wäre freilich die Existenz der fünf *Schläfli*schen Typen (Nr. 6) auf einer einfachen $\overline{F}_3$ nachzuweisen und zu entscheiden, ob damit alle Realitätstypen (ohne d_2) erschöpft sind.

Im obigen Sinne werden auch[77]) (1910) einfache „zyklische“ c der Ebene untersucht, für die die Maximalzahl der Schnittpunkte mit einem Kreise gleich 4 ist.

Merkwürdig ist der Satz[77]) (1911), daß eine einfache $\overline{F}$, die mit einem Kegelschnitt höchstens sechs Punkte gemein hat, mit gewissen Ausnahmen (so der windschiefen $\overline{F}_3$, s. oben) eine algebraische F_3 ist.

Desgleichen gilt, zum Unterschiede von der Ebene (s. oben), daß eine einfache $\overline{F}$, die mit einem Kreise höchstens vier Punkte gemein hat, mit gewissen Ausnahmen algebraisch ist (1911).

Die Bedeutung der einfachen $\overline{F}_3$ zeigt sich weiter darin, daß auf sie der allgemeine Begriff einer „*Elementarfläche*“, als Analogons zur nichtanalytischen $\overline{C}$, zurückführbar ist: eine solche läßt sich aus Flächenstücken 3. Ordnung zusammensetzen; die Operationen des Schneidens und Projizierens liefern dann wiederum $\overline{C}$[77]) (1913).

77c) Einfache c behandelt mengentheoretisch *J. Hjelmslev*, Nyt Tiddskr. Mat. 18 B (1907), p. 49.

Ein instruktives Beispiel einer solchen Elementarfläche ist (1915) die Verallgemeinerung $\bar{S}$ der *Steiner*schen S[77]) (Nr. **13**); diese $\bar{S}$ wird von jeder in einem hyperbolischen Punkte berührenden Ebene in zwei durch den Punkt gehenden $\bar{c}_2$ geschnitten. Sie hat eine oder drei Doppelgerade, keine oder zwei oder vier singuläre Ebenen. Überhaupt zeigt sich durchgängige Analogie mit den Eigenschaften der algebraischen *Steiner*schen S.

18. Zusammenhang zwischen den 27 Geraden und dem Pentaeder nach Cremona und Beltrami. Auf einen Zusammenhang zwischen den 27 Geraden und dem Pentaeder ging *Cremona*[78]) ein. Nach Ausscheidung einer Doppelsechs verbleiben 15 Gerade, in denen sich zehn Paare konjugierter Trieder[79]) (s. Nr. **11**) schneiden; deren Ecken sind reziproke Pole der F_3 (konjugierte Pole der Kernfläche), und bilden so ein „*Polarhexaeder*" der F_3. Seien dessen Ebenen $y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ mit der Identität $\sum y = 0$. Dann schreibt sich die Gleichung der F_3 in den zehn Gestalten („Hexaederformen"):

$$(6) \qquad F_3' \equiv \sum y^3 \equiv (y_i + y_k)(y_k + y_l)(y_l + y_i) + (y_l + y_m)(y_m + y_n)(y_n + y_l) = 0.$$

Jedem der 36 Hexaeder läßt sich eine Γ_3 einbeschreiben; irgend zwei dieser Γ_3 haben fünf Ebenen gemein, und eben diese bilden das Pentaeder der F_3.

---

78) *Cremona,* Math. Ann. 13 (1878), p. 301. Die Hexaederform (6) F' der F_3 wird daher auch als *Cremona*sche Form der F_3 bezeichnet. Wegen ihrer Brauchbarkeit für die Aufstellung von Komitanten der F_3 vgl. *C. P. Sousley,* Amer. J. 39 (1917), p. 135. Vermöge des *Clebsch*schen Übertragungsprinzips wird die Symbolik der F_3 im S_3 übergeführt in eine entsprechende Symbolik für die F_3' im S_5; insbesondere werden so die Invarianten und linearen Kovarianten studiert. Durch Adjunktion gewisser irrationaler Invarianten von F_3' läßt sich eine typische Abbildung der F_3 auf die F_3' herstellen. Da die Gleichungen für die g der F_3' bekannt sind, so gelangt man auf diesem Wege zu einer invarianten Darstellung der Gleichungen der g auf der F_3, wobei die Abbildung der F_3' auf die Ebene (Nr. **11**) gute Dienste leistet. Über die Rolle, die die Form F_3' bei den gruppentheoretischen Untersuchungen von *Coble* spielt, s. Nr. **22**. Auf Grund der *Cremona*schen Form werden die Konfigurationen der Geraden und Ebenen der F_3 untersucht von *A. C. Dixon,* Quart. J. 41 (1910), p. 203. Eine Reduktion der 36 Polarhexaeder auf gewisse 11 „Haupthexaeder", im Falle von $1\,d_2$, führt *C. Caporali* aus, Napoli Rend. 20 (1881), p. 34, 59. Über *Cremona*sche Formen im S_4 s. *H. W. Richmond,* Quart. J. 34 (1903), p. 117.

79) Die 15 Geraden, die mit ihren 15 Ebenen eine Konfiguration $(15_3, 15_3)$ bilden, stehen in einer eigenartigen Beziehung zur *Pascal*schen Konfiguration, nach *Cremona,* Ist. Lomb. A (3) 1 (1877, April), p. 854; vgl. *R. de Paolis,* Rom Linc. Mem. 10 (1880/81), p. 123; *C. le Paige,* Acta math. 5 (1884), p. 195; *„Reye"*, p. 182.

E. Beltrami[80]) zeigte durch Partialbruchzerlegung, wie die Gleichung der F_3 überhaupt auf ∞^4 Weisen in die Gestalt $F_3' \equiv \sum y^3 = 0$ gebracht werden kann; von diesen ∞^4 „*Polarhexaedern*" gelangt man zu den Ebenen des Pentaeders durch Auflösung einer Gleichung 5. Grades.

19. Fortsetzung. Binäre Beziehungen der Fläche auf kubische Raumkurven nach W. Fr. Meyer. Ergänzungen von Waelsch. Von kubischen Raumkurven C_3[80a]), die mit der F_3 organisch verbunden sind, treten hauptsächlich drei verschiedene Gattungen auf.

Erstens, entsprechend den 72 „Sechsen" der F_3, die 72 ∞^2-Scharen von C_3 auf der Fläche, deren jede die Geraden einer Sechs zu Sekanten besitzt. Ihre Bedeutung trat bereits bei der „Sekantenabbildung" der F_3 (Nr. **11**) hervor.

Zweitens, die zu den ersteren C_3 „assoziierten" 72 ∞^2-Scharen von C_3, die je die Geraden einer Sechs zu Achsen (Linien zweier Schmiegungsebenen) haben.

Drittens, die ∞^2-Schar der dem Pentaeder einbeschriebenen $C_3 = \Gamma_3$, die vermöge der ihnen umbeschriebenen je ∞^2 Polarhexaeder den Zusammenhang des Pentaeders mit den 27 Geraden vermittelten (s. Nr. **18**).

Es soll die Aufgabe sein, diese drei Gattungen von C_3 für eine invariantentheoretisch *binäre* Behandlung („Binäranalyse") der F_3 fruchtbar zu machen.[81])

Bei der ersten Gattung bildet sich die Handhabe dazu von selbst in der Abbildung der F_3 nach Nr. **11**. Bei Auszeichnung der Geraden einer Sechs waren die Bilder der ∞^2, jene Geraden zu Sekanten be-

---

80) *E. Beltrami,* Ist. Lomb. Rend. 12 (1879), p. 24. Vgl. *A. L. Dixon,* London Math. Soc. Proc. (2) 7 (1909), p. 389.

80a) Zur Theorie der C_3 vgl. die Monographien von *H. Schroeter,* Flächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung, Leipzig 1880; *O. Staude,* Raumkurven 3. Ordnung, Leipzig 1913, sowie den Art. von *Staude*, III C 2, Flächen 2. Ordnung . . ., und den Bericht von *Th. Reye,* Hamb. Mitt. 20 (1890), p. 43.

Die Figur von zwei C_3 und ihrer invarianten Gebilde wird verfolgt von *Th. Reye,* Math. Ann. 68 (1910), p. 417; 75 (1914), p. 586; *St. Jolles,* Math. Ztschr. 2 (1918), p. 318; 5 (1919), p. 169. Auf allgemeinerer Grundlage vom Standpunkte der *Abel*schen Modularfunktionen ($p = 4$) aus untersucht die Figur von zwei C_3 *A. B. Coble,* Amer. J. Math. 46 (1924), p. 143. Die Inzidenzbedingung zwischen einer Ebene der einen C_3 und einem Punkte der anderen führt zu einer (3, 3)-Korrespondenz, und vice versa. Dabei ergeben sich zahlreiche Zusammenhänge mit den r_5 und r_6, der F_3, dem Symmetroide u. a. S. auch die Vorarbeit Amer. J. Math. 41 (1919), p. 243, wo das Verhalten der r_6 und des Symmetroides gegenüber *Cremona*-Transformationen des S_2 und S_3 studiert wird.

81) *W. Fr. Meyer,* „Apolarität und rationale Kurven", Habil.schr. Tübingen 1883, bes. Abschn. 3 und 4.

sitzenden C_3 ein Netz von r_5 mit d_2 in den sechs Fundamentalpunkten, dagegen die Bilder der ∞^2 konjugierten C_3, mit den sechs konjugierten Geraden als Sekanten, die Geraden c_1 der Ebene. Man wird also hier die c_1 als die, in binärem Sinne, einfachsten Kurven bevorzugen und etwa die Schnitte der C_3 mit anderen Flächenkurven auf die Schnitte der c_1 mit den Bildkurven zurückführen.

So z. B. ergibt sich die Gleichung 12. Grades für die Argumentenpaare der sechs Sekanten der C_3 als äquivalent mit der Gleichung für die sechs Schnittpunktepaare einer c_1 mit den sechs Kegelschnitten B_i (durch je fünf der A).

Bei der zweiten Gattung von C_3 dagegen ist es gerade umgekehrt: jetzt treten die r_5[82]) als die binären Hauptrepräsentanten der F_3 in den Vordergrund.

Vorab ist es erforderlich, auf einer C_3 selbst einen Parameter λ auszubreiten. Bei geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders ergibt sich als einfachste Darstellung der C_3 die als „*Normkurve*“ N_3 resp. N_3[82a]):

$$\begin{cases} x_3 : x_2 : x_1 : x_0 = \lambda^3 : 3\lambda^2 : 3\lambda : 1; \quad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = \lambda^3 : -\lambda^2 : \lambda : -1; \\ p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23} = 1 : 2\lambda : \lambda^2 : 3\lambda^2 : 2\lambda^3 : \lambda^4. \end{cases}$$

82) *W. Fr. Meyer,* München Ber. 1885, p. 415.

Über den Gestaltenreichtum der r_5 mit sechs reellen d_2 s. *W. Fr. Meyer,* Diss. München 1878, und Edinburgh Proc. 13 (1886), p. 931. Die Untersuchungsmethode besteht in einer Kombinierung topologischer Eigenschaften von „Knoten“ (nach *P. G. Tait*) und der quadratischen eineindeutigen Verwandtschaft T_2 (s. Nr. 11). Vgl. auch die Note 77a in Nr. 17. Die r_5 entstehen, indem man zunächst auf eine c_2 eine quadratische Transformation T_2 ausübt, für die die Ecken des Fundamentaldreiecks der c_2 nicht angehören, während dessen Seiten die c_2 je in zwei reellen Punkten treffen. Damit geht die c_2 in eine r_4 mit drei eigentlichen d_2 über. Eine solche r_4 wird wiederum einer T_2' unterworfen, für die die Ecken des Fundamentaldreiecks einfache Punkte der r_4 sind, während dessen Seiten je zwei reelle Restpunkte ausschneiden. Dadurch geht die r_4 über in eine r_5 mit sechs eigentlichen d_2, und entsprechend rückwärts. — Ersetzt man die c_2 durch ein topologisches Oval (Nr. 17) der Ordnung und Klasse Zwei, das von einer c_2 in höchstens vier reellen Punkten getroffen wird (deren Anzahl aber auch erreicht wird), so ergeben sich die topologischen r_4 mit drei eigentlichen d_2. Wird eine solche r_4 von einer c_2 in höchstens acht reellen Punkten getroffen (deren Anzahl erreicht wird), so gelangt man zu den topologischen r_5 mit sechs eigentlichen d_2. Die von *Meyer* (l. c.) gezeichneten algebraischen r_5 sind daher auch als Bilder der entsprechenden topologischen r_5 anzusehen. — Auf gewisse Transformationen und Korrespondenzen, die mit der r_5 zusammenhängen, weist *J. R. Conner* hin, John Hopk. U. C. Heft 2 (1911), p. 64. Vom Standpunkt der Normkurve N_5 im S_5 aus behandelt die Invariantentheorie der r_5 eingehend *W. Müller,* Giorn. di mat. 60 (1922), p. 103; s. auch die Diss. Leipzig 1912.

82a) Über die Darstellung binärer Formen auf der C_3 resp. N_3 und deren geometrische Bedeutung liegen zahlreiche Untersuchungen vor. Wir erwähnen

Die Bedeutung dieser Normdarstellung beruht darauf, daß die (mit einer Größe s_0 homogen gemachten) elementaren symmetrischen Verbindungen s_i $(i = 3, 2, 1, 0)$ von drei Argumenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ übereinstimmen mit den Koordinaten x_i des Punktes P, von dem die drei Ebenen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ an die N_3 gehen.

In der Folge zeigt es sich, daß alle binären Bildungen zurückkommen auf lineare „*s-Formen*“ $a_s, b_s, \ldots$, wo die s die elementaren symmetrischen Verbindungen von ν $(\leqq n)$ Argumenten λ sind, oder auch auf die binären Formen $a_\lambda^\nu, b_\lambda^\nu, \ldots$, deren lineare Polaren die s-Formen sind. Der mit diesen s-Formen verknüpfte Rechnungsalgorithmus gestaltet sich dadurch einfach, daß man nach bekannten Regeln die s multilinear ausdrücken kann in solchen s, die sich auf irgendwelche Teilgruppen der λ beziehen, in die man die λ zerlegt haben mag. Man gehe jetzt umgekehrt von einer gegebenen r_5 aus, so daß die x_i binären Formen f_i 5. Grades proportional werden: die sechs Doppelpunkte d_2 mögen die Argumente α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ tragen. Zwischen diesen bestehen drei Relationen[82]), und genau diese sind charakteristisch für die Argumentenpaare von sechs solchen Sekanten der C_3, die eine „Sechs“ bilden. (S. Nr. 7, Note 20a.)

Die ∞^9, bei gegebener C_3 so bestimmten F_3, entsprechen den ∞^9 F_3, die durch die C_3 hindurchgehen.

Das Kriterium dafür (*„Schnittpunktetheorem“*), daß fünf Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ der r_5 einer Geraden angehören, wird durch drei Relationen von der Gestalt $a_s = 0$, $b_s = 0$, $c_s = 0$ gegeben, wo die s aus den λ gebildet sind. Spaltet man hier die λ in zwei Teilgruppen λ_1, λ_2 und $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ mit den symmetrischen Verbindungen τ_k $(k = 0, 1, 2)$ und σ_l $(l = 0, 1, 2, 3)$, so ergibt sich sofort das *Clebsch*sche Schema (Nr. 11) für die Abbildung einer F_3, und umgekehrt. Demnach ist diese Abbildung in binärem Sinne dadurch charakterisiert, daß die in einem (auf einen Normkegelschnitt bezogenen) Punkte $\tau(\lambda_1, \lambda_2)$ der Hilfsebene und dem zugehörigen (auf eine kubische Normkurve bezogenen) Punkte $\sigma(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ der F_3 enthaltenen λ gerade die fünf Schnittpunkte der r_5 mit einer Geraden liefern. Oder auch: die F_3 erscheint als Ort aller „Inzidenztripel“ $(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$.

Einer Geraden g der F_3 entspricht eine Involution J_3 (Büschel)

---

etwa noch: *R. Sturm,* J. f. Math. 86 (1878), p. 116; *E. d'Ovidio,* Giorn. di mat. 17 (1879), p. 310; *F. Gerbaldi,* Torino Atti 15 (1880), p. 810; *L. Berzolari,* Palermo Rend. 5 (1891), p. 9, 33; *G. Kohn,* Wien Ber. 105 (1896), p. 1035 (C_3, die F_3 berühren); Deutsche Math.-Ver. 5_1 (1897), p. 58 (Binäre Behandlung der Korrelationen im S_n mittels der Normkurve N_n). Die durch eine C_3 gehenden F_3 führt *E. Waelsch,* Deutsche Math.-Ver. 4 (1897), p. 113 auf binäre Korrespondenzen zurück.

kubischer binärer Formen; die binären Bilder der sechs Geraden a sind die durch die Strahlbüschel der d_2 aus der r_5 ausgeschnittenen J_3. Die Bilder der sechs konjugierten Geraden b erhält man, wenn man die r_3-Büschel, die in einem Doppelpunkt der r_5 einen d_2 besitzen und durch die übrigen einfach hindurchgehen, mit der r_5 in Büscheln von Punktepaaren schneidet und die J_3 von deren Resttripeln bildet.

Endlich gelangt man zu den Bildern der 15 Geraden c_{ik} vermöge der c_2-Büschel durch irgend vier der Doppelpunkte, die die r_5 wiederum in Büscheln von Punktepaaren treffen, deren Resttripel zu den gesuchten J_3 führen.

Den neun Schnittpunkten der F_3 mit der C_3 korrespondieren die neun Wendepunkte der r_5, die durch die Wurzeln der Funktionaldeterminante Θ der f_i bestimmt sind. Denkt man sich umgekehrt jene neun Schnittpunkte auf der C_3 beliebig vorgegeben, so liegt das endlich-deutige Problem vor, zu gegebenem Θ ein zugehöriges Netz von f_i zu finden; jeder der 72 Sechsen auf der F_3 entspricht dabei ein solches Netz.

Am fruchtbarsten erweist sich die dritte Gattung von C_3.

Man gehe zunächst wieder von einer gegebenen C_3 als kubischer Normkurve ($N_3 = \mathsf{N}_3$) aus und markiere auf ihr neun beliebige Punkte, Wurzeln einer $f_9 = a_\lambda^9$.

Durch diese neun Punkte geht nur eine einzige, zu N_3 konjugierte (apolare) F_3 $a_{\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2} = 0$, so daß jede F_2 des Gebüsches der ersten Polaren der F_3 konjugiert ist zu jeder der N_3 einbeschriebenen Φ_2. Man hat also wiederum eine ∞^9-Schar von F_3, die der C_3 zugeordnet sind. Die einzelne Relation $a_s \equiv a_{\varrho\sigma\tau} = 0$ liefert dann ∞^8 „*Polenneader*“, derart, daß je drei Ecken ϱ, σ, τ eines solchen, an denen alle neun Ebenen partizipieren, ein Poldreieck der F_3 liefern. Versteht man unter f_0, f_1, f_2, f_3 die dritten (nach den homogenen Variabeln λ, μ genommenen) Ableitungen von f, und unter A_0, A_1, A_2, A_3 die zugehörigen linearen Polaren in sechs Argumenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$, so stellen die Relationen $A_i = 0$ die ∞^2 der N_3 umbeschriebenen *Cremona*schen Polarhexaeder dar; der Gesamtheit der ∞^2 C_3 entspricht die Gesamtheit aller ∞^4 Polarhexaeder.

Diese zur einzelnen N_3 gehörigen ∞^2 Polarhexaeder erhalten jetzt noch eine neue Bedeutung; je zwei ihrer konjugierten Ecken sind konjugiert in bezug auf das Gebüsch der ersten Polaren F_2 der F_3. Die Gesamtheit der N_3-Ebenensextupel der ∞^2 Hexaeder ist binär konjugiert zur Gesamtheit der N_3-Punktesextupel, die von den F_2 des Polarengebüsches der F_3 ausgeschnitten werden.

Das binäre Aquivalent für die Polareigenschaft der ∞^2 Hexaeder bzw. des F_2-Gebüsches liegt darin, daß die f_9 auf ∞^2 Arten als Aggregat von sechs neunten Potenzen kanonisch darstellbar ist, mithin jede F_2 des Gebüsches als Aggregat von sechs Quadraten.

Der Ort der Ecken der ∞^2 Hexaeder ist eine F_4 mit zehn Geraden; das binäre Bild ist eine r_6 mit einem d_5, deren Netz von Darstellungsformen f_6 konjugiert ist zum Gebüsch der obigen f_i, und deren mit dem d_5 äquivalente zehn d_2 jenen zehn Geraden entsprechen. Je zwei konjugierte Ecken eines Hexaeders bilden sich ab auf zwei Tripel von Punkten der r_6, die auf einer c_1 liegen; die F_4 erscheint als Ort aller Inzidenztripel.

Aus den ∞^2 Hexaedern lassen sich Involutionen von ∞^1 derart herausgreifen, daß die letzteren ein Pentaeder gemein haben, dessen binäres Bild der d_5 ist, während die sechste Ebene auf der N_3 unbestimmt bleibt. (S. oben bei *Beltrami*, Nr. 18.) Das Pentaeder ergibt sich direkt aus der f_9 vermöge deren eindeutiger „kanonischer" Darstellung als Aggregat von fünf neunten Potenzen $(\lambda - \lambda_i)^9$; die λ_i sind die Wurzeln der zu allen vierten Ableitungen der f_9 konjugierten Form (*Sylvesters* „Kanonizante").

Dieses Pentaeder ist kein anderes als das „*Pentaeder*" der F_3 (s. Nr. 3); aus der kanonischen Darstellung der f_9 geht die korrespondierende der F_3 direkt durch Polarenbildung hervor. Umgekehrt ist jede der ∞^2, dem Pentaeder der F_3 einbeschriebenen Γ_3 konjugiert zum Polarengebüsch der F_3, und kann als Normkurve verwendet werden.

Damit ist auch ein binärer organischer Zusammenhang zwischen dem Pentaeder und den 27 Geraden der F_3 hergestellt, und zugleich ein neuer Beweis des Pentaedersatzes gewonnen (s. Nrn. 3, 18).

Geht man von einer „Sechs" der F_3 aus, legt eine der ∞^2 C_3, für die die Geraden der Sechs Achsen sind, als Normkurve zugrunde, so erscheint die F_3 als die einzige durch ihre neun Schnittpunkte $(f_9 = 0)$ — die den Wendepunkten der binären Bildkurve r_5 entsprechen — gehende, zur N_3 konjugierte F_3. Die kanonische Darstellung der f_9 führt unmittelbar zum Pentaeder der F_3; dieses stellt sich zugleich dar als ein ausgeartetes der ∞^2 Hexaeder, deren Gegenecken in bezug auf das Polarengebüsch der F_3 konjugiert sind.

Umgekehrt, geht man vom Pentaeder der F_3 aus, so lege man eine der ∞^2 ihm einbeschriebenen Γ_3 als Normkurve zugrunde, dann gelangt man rückwärts zur f_9 der Schnittpunkte der F_3 mit der N_3. Faßt man alsdann, was auf eine endliche Anzahl (72) von Arten möglich ist (s. oben), die f_9 als Funktionaldeterminante Θ eines Netzes von f_5 auf, so führt das konjugierte Netz direkt zur *Clebsch*schen

Abbildung der F_3 mit Auszeichnung einer Sechs, deren Gerade Achsen der N_3 sind.

Läßt man die Zwischenglieder weg, so reduziert sich der Zusammenhang zwischen dem Pentaeder und den 27 Geraden der F_3 auf eine binärinvariante Zuordnung zwischen einer r_5 und einer r_6 mit d_5, die beiderseits auf eine kubische Normkurve bezogen sind; die erstere repräsentiert die 27 Geraden, insonderheit deren Sechsen, zugleich mit der *Clebsch*schen Abbildung, die letztere die Polarhexaeder der Kernfläche, speziell deren Pentaeder, zugleich mit dem Polarengebüsch.

Eine eigenartige Ergänzung rührt von *E. Waelsch*[83]) her. Die sechs Paare von Sekantenpunkten einer C_3, die zu einer Sechs der F_3 gehören (s. oben), genügen als sechs f_2 einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung; diese Gleichung, die sich in eine einfache invariante Form als Aggregat von Überschiebungen bringen läßt, ordnet direkt den sechs Sehnen f_2 alle Kollineationen von drei Ebenenbündeln zu, die die F_3 erzeugen (Nr. 7).

Waelsch geht dabei von allgemeineren Ansätzen aus. Zugrunde wird gelegt eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten ganzrational von $x = \frac{x_1}{x_2}$ abhängen, in homogener Gestalt: $\Phi \equiv \sum g_\nu^{(i)} f_{i,n-i} = 0$, wo die g binäre Formen der Ordnung ν sind, und die $f_{i,n-i}$ die Ableitungen einer homogenen (beliebigen, nur wiederholt differenzierbaren) Funktion $f(x_1, x_2)$.

Ist speziell f eine binäre Form f_μ $(\mu \geqq n)$, so läßt sich Φ als Aggregat von Überschiebungen von f mit anderen Formen $f_{n+\nu}$, $f_{n+\nu-2}$, ... darstellen.

Die ganzrationalen Lösungen f_μ von $\Phi = 0$ stehen in Beziehung zu den Kollineationen des mehrdimensionalen Raumes und seiner „Ebenenbündel". Denn jeder Form f_μ entspricht eine bestimmte Form Φ, und jedem linearen Systeme von f ein ebensolches System von Φ.

20. Das Gebüsch der ersten Polaren der Fläche. Umgekehrt läßt sich fragen, wann ein F_2-Gebüsch zum Polarengebüsch (Nr. **19**) einer F_3 wird.

83) *Waelsch,* Prag Math. Ges. 1892, p. 78.

Es sei hier auf das Lebensprogramm von *Waelsch* hingewiesen, die projektive Invariantentheorie des n-ären Gebietes auf die des binären zurückzuführen. Vgl. die grundlegenden Abhandlungen Wien Ber. 100 (1891), p. 315 (Polargruppen von f auf N_n); 112 (1903), p. 645, 1091, 1533, sowie Monatsh. Math. Phys. 6 (1895), p. 261, 373 (Kollineationen und Korrelationen des S_n); Art. III D 10, *R. Weitzenböck,* Neuere Invariantentheorie. Die Gruppen projektiver Transformationen der Normkurve im S_n in organischem Zusammenhange mit der binären Invariantentheorie untersucht allgemein *A. Comessatti,* Math. Ann. 89 (1921), p. 272; 90 (1922), p. 174.

W. Frahm[84]) bemerkte, in dem er sich mit dem Ort der Spitzen der in einem F_2-Netz enthaltenen Kegel beschäftigte, daß die von „*Salmon-Fiedler*“ benutzte kanonische Darstellung von $3F_2$ als Summen von Quadraten derselben fünf Linearformen im allgemeinen Falle nicht möglich ist; wenn aber im besonderen, so auf ∞^2 Weisen. Oder auch auf Grund des „*Pentaedersatzes*“ (Nr. 3): „Drei F_2 lassen sich im allgemeinen nicht als Polaren einer F_3 darstellen.“

Diese Unmöglichkeit folgt auch direkt aus einem Satze von *Lüroth*[85]), wonach einer allgemeinen c_4 ein vollständiges Vierseit nicht einbeschrieben werden kann.

Algebraisch hat *E. Toeplitz*[86]) die Frage direkt erledigt. Er stellt mittels symbolischer Rechnung diejenige simultane Invariante J von $3F_2$ in einfacher Gestalt auf, die dann und nur dann verschwindet, falls jene Darstellung möglich ist.

Diese Bedingung $J = 0$ erweist sich aber auch hierfür als hinreichend; es wird die Schar der F_3 aufgestellt, deren Polaren die gegebenen F_2 sein können, wenn J verschwindet. Aber auch dafür zeigt sich diese Bedingung als notwendig und hinreichend, daß die drei F_2 als Summen von Quadraten derselben fünf Linearformen darstellbar sind Damit ist zugleich ein neuer Beweis des Pentaedersatzes (Nr. 3) erbracht.

---

84) *Frahm,* Math. Ann. 7 (1874), p. 635.

85) *Lüroth,* Math. Ann. 1 (1869), p. 37. *Clebsch,* J. f. Math. 59 (1861), p. 125, hatte gezeigt, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, eine ternäre biquadratische Form als Summe von fünf vierten Potenzen darzustellen, daß vielmehr solche c_4 sich durch das Verschwinden einer Invariante auszeichnen; *Lüroth* zeigt, daß das Verschwinden jener Invariante auch hinreichend ist für jene Darstellung, und leitet eine Reihe charakteristischer Eigenschaften solcher c_4 ab. Einen zweiten Beweis seines Satzes liefert *Lüroth* mit Hilfe gewisser, von *L. Kronecker* eingeführter Begriffe: Math. Ann. 13 (1878), p. 548. — Eine schon von *Steiner* betrachtete F_4, deren ebene Schnitte *Lüroth*sche c_4 sind, untersucht eingehend *F. Schur,* J. f. Math. 95 (1883), p. 207, und beweist auch die Umkehrung. Die F_4 steht in engem Zusammenhange mit desmischen Tetraedern.

Die *Lüroth*sche Arbeit hat Veranlassung zu eine Reihe weiterer gegeben, die den Gegenstand genauer verfolgen: *E. Ciani,* Napoli Rend. (3) 2 (1888), p. 126; *G. Scorza,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 155 (∞^3 Polsechsseite usf.); *G. Manfredini,* Giorn. di mat. 40 (1902), p. 16; *H. S. White* u. *Kate G. Miller,* Amer. Math. Soc. Bull. (2) 15 (1909), p. 347; *H. Bateman,* Amer. J. math. 36 (1914), p. 397 (mit weiterer Untersuchung der Beziehungen zwischen c_4 und F_3); *F. Morley,* Amer. Math. Soc. Bull. 23 (1917), p. 270; Amer. J. math. 41 (1919), p. 279.

86) *Toeplitz,* Math. Ann. 11 (1877), p. 422. Vgl. die weitere Ausführung bei *A. C. Dixon,* London Math. Soc. Proc. (2) 7 (1909), p. 150.

Eine geometrische Konstruktion des Polargebüsches der F_3 stammt von *H. Thieme*[87]) her.

Den Punkten des S_3 werden die F_2 eines Gebüsches projektiv so zugeordnet, daß die Polare eines Punktes P für die einem zweiten Punkte Q zugeordnete F_2 mit der Polaren von Q für die, P zugeordnete F_2 zusammenfällt. Aus zwei solchen Polarsystemen wird das Büschel, aus drei solchen der Bündel usf. konstruiert.

Die Gesamtheit der F_3 erweist sich als eine lineare ∞^{19}-Schar; es wird die Konstruktion der F_3 aus 19 Punkten durchgeführt (Nr. 21).

Es kommen hier die allgemeinen Prinzipien zur Geltung, die *Thieme* in einer früheren Arbeit[87]) (1879) vermöge vollständiger Induktion für die Konstruktion von Polarsystemen von Kurven und Flächen entwickelt hatte.

21. Lineare Konstruktionen der Fläche. Allgemeinere Gesichtspunkte bei v. Escherich. Daran reihen sich lineare Konstruktionen der F_3, wenn sie durch gegebene Punkte und Gerade, also im besonderen durch 19 Punkte gehen soll.

Mit Hilfe der *„reziproken Flächensysteme"*, einer Erweiterung des Apolaritätsbegriffes, hat *G. v. Escherich*[88]) die Frage allgemein für F_n untersucht.

Zwei lineare Systeme μ^{ter} Stufe von F_m und F_n: $\sum \lambda_i U_i = 0$, $\sum \nu_i V_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, \mu)$ heißen *„reziprok"*, wenn ihre Parameter λ, ν an eine bilineare Relation gebunden sind. Flächen, die solchen Systemen korrespondieren, die ein System $(\mu - \sigma - 1)^{\text{ter}}$ Stufe gemein haben, bilden ein System σ^{ter} Stufe. Jeder Punkt P bestimmt in jedem der beiden Systeme (U), (V) ein System $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Stufe; die diesem entsprechende Fläche im andern kann auch als die „dem Punkte P entsprechende" bezeichnet werden. Liegt ein Punkt *auf* einer entsprechenden Fläche im einen Sinne, so auch auf der im andern Sinne entsprechenden Fläche. Damit ergibt sich eine F_{m+n} als Ort der Punkte, die auf ihren entsprechenden Flächen liegen. In dieser allgemeinen *Erzeugung* einer F_{m+n} sind als Spezialfälle die bekannten[88a]) durch projektive Büschel, reziproke Bündel, einer F_2 als

87) *Thieme*, Math. Ann. 28 (1886), p. 133. Vgl. die vorbereitenden allgemeinen Betrachtungen von *Thieme*, Ztschr. Math. Phys. 24 (1879), p. 221, 276. Darstellendgeometrisch behandelt die Polaren einer F_n *C. Rodenberg*, Math. Ann. 26 (1886), p. 557.

88) *v. Escherich*, Wien Ber. 75 (1877), p. 523; 85 (1882), p. 526, 893; 90 (1884), p. 1056.

88a) Vgl. *Th. Reye*, Math. Ann. 1 (1869), p. 455; 2 (1870), p. 475; *H. Valentiner*, Tiddskr. Mat. (4) 3 (1879), p. 22; *F. Schur*, Math. Ann. 18 (1881), p. 1;

Ordnungsfläche zweier reziproker Räume u. a. enthalten. Jede F_{n+p} ist erzeugbar durch zwei reziproke Bündel ($\mu = 2$) für $p \leqq 7$. So entsteht im besonderen eine F_3 durch die Punkte, die bei einer reziproken Beziehung der Punkte des Raumes auf ein F_2-Gebüsch in ihre entsprechenden Flächen fallen.

Benützt man von den bestimmenden 19 Punkten einer F_3 nur 18, so kann man sieben Grundpunkte der Bündel 2. und 1. Ordnung in gegebene Punkte legen. Damit tritt eine Reduktion auf die folgende Aufgabe ein: ein Ebenenbündel ist gegeben; einen reziproken so zu konstruieren, daß 11 gegebene Strahlen des ersteren im letzteren Ebenen durch 11 gegebene Punkte entsprechen. Und diese Aufgabe kommt wieder auf die andere zurück, zwei Räume S_3 reziprok so aufeinander zu beziehen, daß 15 Punkte des einen „konjugiert" sind zu 15 im andern, d. h. zu solchen, die in entsprechenden Ebenen liegen; letztere Aufgabe wird stufenweise auf einfacheren Aufgaben aufgebaut.

Sind so irgend zwei F_3 durch 18 Punkte hergestellt, so wird die F_3 durch 19 Punkte erzeugt, indem vermittels der quadratischen Involution auf den Geraden, die den 19$^{\text{ten}}$ Punkt mit den 18 verbinden, je der 3$^{\text{te}}$ Punkt konstruiert wird; mit Hilfe solcher Punkte ergeben sich dann reziproke Flächen- und Ebenenbündel, die die F_3 durch die 19 Punkte erzeugen.

Auf dem angegebenen Wege lassen sich die F_2, F_3, F_4 mit alleiniger Hilfe von Zirkel nnd Lineal punktweise konstruieren.

Für einen besonderen Fall gelangt *F. Schur*[89]) so direkt zur F_3 durch 19 Punkte. Es ist dabei von Vorteil, die Erzeugung durch einen Strahlenbündel und einen reziproken F_2-Bündel aufzulösen in eine solche durch drei nach *August* (Nr. 9) trilinear reziprok verknüpfte Strahlenbündel.

M. Pannelli[90]) stützt sich analog auf die Erzeugung der F_3 durch drei trilinear verwandte Strahlenbündel (A), (B), (C). Man nehme etwa in (A) einen Strahl a an, und konstruiere die Schnittpunkte von a mit der F_2, die durch die projektive Beziehung zwischen (B) und (C) bestimmt ist; diese beiden Punkte gehören der F_3 an, die durch 19 gegebene Punkte gehen soll. Variiert a, so gelangt man punktweise zur ganzen F_3.

W. Fiedler, Zürich Vierteljahrsschr. 24 (1882), p. 180; *F. P. W. White,* Cambridge Phil. Soc. Proc. 21 (1920), p. 16 (Ausdehnungen auf den S_n).

89) *Schur,* Math. Ann. 23 (1884), p. 437.

90) *Pannelli,* Ann. di mat. 22 (1894), p. 237.

C. le Paige[91]) hat mit Hilfe von höheren Involutionen, insbesondere durch die *August*sche trilineare Verwandtschaft[91a]) zwischen drei Ebenenbüscheln (Nr. 9), eine Reihe von Konstruktionen für die F_3 durch 19 Punkte entwickelt. Wir führen hier nur die relativ einfachste an. Danach wird das F_3-Büschel durch 18 Punkte schrittweise zurückgeführt auf die Konstruktion einer F_3 durch sieben Punkte und drei windschiefe Gerade, die auf die einer F_2 durch neun Punkte zurückkommt. Weiter bedarf man einer F_3 durch eine Gerade, 3×3 Punkte je in einer Geraden und sechs andere Punkte; weiter einer F_3 durch eine Gerade, drei Punkte in einer Geraden und zwölf andere Punkte; endlich einer F_3 durch drei Punkte in einer Geraden und 16 andere Punkte. Damit gelangt man durch Zusammenfassung zur F_3 durch 19 Punkte.

Gleichfalls an die *August*sche Erzeugung knüpft *H. Schubert*[92]) an und gibt für eine Reihe besonderer Fälle einfache Konstruktionen.

22. Gruppentheoretische Behandlung der Fläche, besonders ihrer 27 Geraden, nach Klein und Burkhardt, sowie von Coble. Die Gleichung 27. Grades $f_{27} = 0$, von der die Bestimmung der 27 Geraden der F_3 abhängt, besitzt nach *C. Jordan*[93]) keine Resolvente geringerer Ordnung. Den niedrigsten bekannten Resolventen entsprechen geometrisch die 36 *Schläfli*schen Doppelsechsen, die 40 *Steiner*schen „Ternen", die 40 *Cremona*schen Enneader 1. Art und die 45 „Ebenen" (Nr. 11).

Die Gruppe der f_{27} ist isomorph mit der des Problems der Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlecht zwei.

Die Prinzipien, die das eine Problem in das andere überführen, hat *F. Klein*[94]) in einem Briefe an *C. Jordan* entwickelt; *H. Burk-*

91) *Le Paige,* Acta math. 3 (1884), p. 181. *Le Paige* bedient sich auch mit Vorteil einer quadrilinearen Verwandtschaft zur Erzeugung der F_3; Acta mat. 5 (1884), p. 195; Brux. Bull. (3) 8 (1884), p. 238, 555.

91a) Zur Theorie der trilinearen Verwandschaft vgl. noch: *B. Klein,* Ann. di mat. (2) 18 (1890), p. 213; *A. Jolles,* J. f. Math. 111 (1893), p. 207. Als Spezialfall allgemeinerer Abbildungen erscheint sie bei *G. Hauck,* J. f. Math. 108 (1891), p. 25; 121 (1894), p. 207; 128 (1904), p. 91.

92) *Schubert,* Math. Ann. 17 (1881), p. 457. Vgl. *E. de Jonquières,* Paris C. R. 105 (1887), p. 1203; 106 (1887), p. 526, 907; 107 (1888), p. 209.

93) *Jordan,* J. de math. 4 (1869), q. 147; Traité des Subst. . ., Paris 1870, p. 316—365.

94) *Klein,* J. de math. 4 (1888), p. 169. — Daß die Gleichung $f_{27} = 0$ algebraisch unauflösbar ist, zeigt einfach, unter Rückgang auf die algebraisch unauflösbaren Gleichungen 5. Grades, *F. Giudice,* Torino Atti 43 (1908), p. 42. — Die Gruppe des Textes untersuchen nach rein gruppentheoretischen Gesichtspunkten *A. de Séguier,* Paris C. R. 173 (1921), p. 433, und ausführlicher *H. Potron,* J. Éc. Polyt. (2) 22 (1922), p. 69.

hardt[95]) hat sie im einzelnen mit expliziten Formeln aus- und durchgeführt.

Bei den linearen Transformationen der Perioden, die die Charakteristik der vier hyperelliptischen Modulfunktionen $Z_{\alpha,\beta}$ (oder auch Z_i, $i = 1, \ldots, 4$) fest lassen, erfahren diese Z eine aus vier Operationen erzeugbare Gruppe G_{51840} linearer Substitutionen S. Aus zwei Reihen kogredienter Z, Z' bilde man die zweireihigen Determinanten a_{ik}, so erfahren diese eine aus sechs Operationen erzeugbare G_{25920} von halb so viel S. Deutet man die Z_i als Punkt-, die a_{ik} als Linienkoordinaten im Raume, so wird durch jene S eine vorher (1887) von *A. Witting*[96]) untersuchte Konfiguration festgelegt. Bei *Witting* treten gewisse „Hauptgerade" der Konfiguration hervor; durch jedes der 45 Paare derselben ist eine Strahlenkongruenz bestimmt, und es gibt 27 ausgezeichnete Fünfen solcher Paare (oder Kongruenzen). Die fünf zugehörigen Kongruenzen gehören jedesmal ein und demselben linearen Komplex an. Die Gleichungen dieser 27 Komplexe sind:

$$\mathsf{E}_k \equiv \varepsilon^{\lambda} a_{ik} - \varepsilon^{\mu} a_{il} - \varepsilon^{-\lambda} a_{im} - \varepsilon^{-\mu} a_{km} = 0$$

$$\left(k, l, m = 0, 1, 2; \quad \lambda, \mu = 0, 1, 2; \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

Diese Ausdrücke E werden bei den Operationen der G unter sich vertauscht.

Es ist auf 72 Arten möglich, je sechs dieser Komplexe „erster Art" $\xi_i = 0$ so auszuwählen, daß die 30 in ihnen enthaltenen Kongruenzen verschieden ausfallen.

Dieselben 30 Kongruenzen lassen sich aber noch auf eine andere Art in sechs Fünfen anordnen, die sechs Komplexen „zweiter Art" $\eta_i = 0$ entsprechen.

Damit ordnen sich die 72 Sechsen linearer Komplexe zu 36 „Doppel-

95) *Burkhardt,* Gött. Nachr. 1892, p. 1; Math. Ann. 41 (1892), p. 313. Weitere Literatur s. daselbst. Vgl. noch die Ergänzungen bei *W. Burnside,* Quart. J. 40 (1909), p. 246. In einer neueren Arbeit, Cambr. Proc. 33 (1927), p. 498 gibt *W. Burnside* eine anschauliche Konstruktion der G_{25920}. Eine „Doppeldrei" (s. Nr. **11**, Note 35d), d. i. eine Konfiguration aus drei windschiefen Geraden nebst irgend dreien ihrer Transversalen, geht, wie leicht ersichtlich, durch $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ Kollineationen K in eine zweite gegebene „Doppeldrei" über. Wendet man dies an auf eine beliebig, aber festgewählte Doppeldrei auf einer F_3, und irgendeine der 360 Doppeldreien der F_3, so gelangt man zu einer Gruppe von $72 \cdot 360 = 25920$ K, die mit der G_{25920} des Textes holoedrisch isomorph ist. Mit dieser ist eine G_{51840} birationaler Transformationen eng verknüpft.

96) *A. Witting,* Diss. Göttingen 1887; Math. Ann. 29 (1887), p. 157.

sechsen" zusammen. Für jede ist $\Sigma_r = \sum \xi_i = -\sum \eta_i$ $(r = 1, \ldots, 36)$, und $\Sigma_r = 0$ liefert einen neuen Komplex zweiter Art; den 36 Doppelsechsen von linearen Komplexen erster Art entsprechen 36 solche zweiter Art, von denen jeder gegenüber 720 S der G ungeändert bleibt.

Setzt man in den $Z_{\alpha\beta}$ ungerader Charakteristik, die gerade Funktionen ihrer Argumente sind, letztere gleich Null, so gehen die $Z_{\alpha\beta}$ in Modulformen $z_{\alpha\beta}$ über. Nun hatte *H. Maschke*[97]) die Invarianten der Z-Gruppe bestimmt; diese werden jetzt zu Modulformen zweiter Stufe, die gewisser Normaldarstellungen fähig sind.

Von den Invarianten der a-Gruppe werden die wichtigsten aufgestellt.

Die Reduktion der f_{27}, deren Gruppe mit dem Problem der a holoedrisch isomorph ist, auf dieses Problem wird nunmehr durchgeführt.

Liegt eine derartige Gleichung $f_{27} = 0$ vor, so zerfallen nach Adjunktion einer Wurzel die übrigen 26 in $10 + 16$, wo die ersteren „konjugiert", die letzteren „nicht konjugiert" heißen.

Versteht man unter x_i eine Wurzel der Gleichung, unter C_i resp. N_i die Summe der zu x_i konjugierten resp. nicht konjugierten Wurzeln, so sind die Ausdrücke $\xi_i = 4x_i - 2C_i + N_i$ lineare Funktionen, derart, daß jedes x_i rational durch das entsprechende ξ_i und die genannten Größen ausdrückbar ist.

Damit ist die Auflösung jeder solchen Gleichung $f_{27} = 0$ auf das Problem der a oder der Z zurückgeführt. Insbesondere gilt dies also von der Gleichung für die 27 Geraden einer F_3; dabei entsprechen zwei konjugierten resp. nicht konjugierten Lösungen zwei inzidente resp. windschiefe Gerade der F_3.

Die Gleichung 27. Grades $f_{27} = 0$ für die g der F_3 steht zu zwei anderen wichtigen Gleichungen der Geometrie in naher Beziehung. Geht man aus von der Gleichung 28. Grades $f_{28} = 0$ für die Doppeltangenten einer c_4 (Nr. **16**), so wird deren Gruppe — die isomorph ist mit der des Problems der Zweiteilung der Perioden bei den Θ-Funktionen vom Geschlecht Drei — nach Adjunktion einer Wurzel zur Gruppe unserer f_{27}. Adjungiert man wiederum von dieser, wie oben, eine Wurzel, so tritt eine Spaltung in eine $f_{10} = 0$ und $f_{16} = 0$

97) *H. Maschke,* Gött. Nachr. 1888, p. 78; Math. Ann. 33 (1889), p. 317; Math. Ann. 36 (1890), p. 190; Chicago Congress Pap. 1897, p. 175. Vgl. noch *E. Meyer,* Math. Ann. 65 (1908), p. 299, wo eine damit verknüpfte Konfiguration von 720 Raumgeraden untersucht wird.

ein; die Gruppe der ersteren ist die der Gleichung für die 10 Geraden der F_3, die die der adjungierten Wurzel entsprechende g treffen; die der letzteren ist die der Gleichung, von der die 16 Geraden einer F_4 mit Doppel-C_2 abhängen (Nr. **16**).

E. Pascal[98]) hat das Einzelstudium der beiden ersteren Gruppen nach der geometrischen Seite hin unter Heranziehung anderer Hilfsmittel wieder aufgenommen.

Pascal stellt sich überhaupt die Aufgabe, die von *Weber, Noether, Frobenius* u. a. aus der Theorie der *Abel*schen Funktionen für $p = 3$ (und $p = 4$) hergeleiteten Ergebnisse geometrisch nutzbar zu machen. Insonderheit kommen hierbei die von *Klein*[99]) eingeführten Begriffe der „*Elementar-*" und „*Primcharakteristik*" zur Geltung, und finden ihre Anwendung auf die Systeme der Berührungskurven der c_4 (Nr. **16**). *Pascal* verfolgt weiter den Einfluß der „*Monodromie*" der *Riemann*schen Fläche für $p = 3$ auf die Charakteristiken und Systeme von Berührungskurven, insbesondere der 28 Doppeltangenten der c_4, die ihrerseits vermöge der *Geiser*schen Projektion (Nr. **16**) auf die F_3, sowie andererseits auf ein F_2-Netz mit acht Grundpunkten bezogen wird. Die gruppentheoretischen Eigenschaften der f_{27} erfahren damit eine weitere Untersuchung.

Scheidet man von den 28 Verbindungslinien der acht Grundpunkte des F_2-Netzes eine aus, so verbleiben 27, die sich den 27 g der F_3 eindeutig zuordnen lassen.

Von hier aus gelangt *Pascal*[100]) zu verschiedenen neuen Konfigurationen auf der F_3. Von Interesse sind die „*Zirkularpolyeder*", die aus 3, 4, 5, ... Ebenen der F_3 so gebildet werden, daß je zwei konsekutive Ebenen eine der 27 g gemein haben; ferner gewisse Systeme von Geradenquintupeln und ihre Beziehungen zueinander und zu den Doppelsechsen. Sodann[101]) werden solche aus den Ebenen der F_3 gebildete Sechsflache untersucht, deren Ebenen die neun Geraden eines der 120 Paare konjugierter Trieder (Nr. **11**) enthalten, das Verhalten dieser 120 Gruppen zueinander, die Anzahlbestimmung derjenigen Paare, Tripel usf., die gewisse Geraden resp. Ebenen gemein haben.

Mit wesentlich anderen Hilfsmitteln, von der Seite gewisser *Cremona*scher Transformationen und ihrer Gruppen her, ist *A. B. Coble*[102])

98) *Pascal,* Ann. di mat. 20 (1892), p. 163, 269.

99) *Klein,* Math. Ann. 36 (1890), p. 1.

100) *Pascal,* Lomb. Ist. Rend. (2) 25 (1892), p. 1098, 1103, 1136.

101) *Pascal,* Rom Acc. Linc. Rend. (5) 1_2 (1892), p. 385, 417; 2_1 (1893), p. 8.

102) *Coble,* Amer. Math. Soc. Trans. 16 (1915), p. 155. — Vollständige Systeme irrationaler Invarianten von P_n^1 stellt *Cl. M. Huber* auf, Amer. J. math. 49 (1927), p. 251.

zu einer eigenartigen gruppentheoretischen Erfassung der F_3 und verwandter Gebilde gelangt. Wir müssen hier etwas weiter ausholen.

Den Ausgang bildet eine „*Reihe*“ („*set*“) P_n^k von n Punkten im S_k. Vermöge des Prinzips korrespondierender Matrizes gehört zu P_n^k eine „*assoziierte*“ Reihe Q_n^{n-k-2}; im Falle $n = 2k - 2$ — also insbesondere für $k = 2$, $n = 6$ — ist eine P_n^k „*sich selbst assoziiert*“.

Die Invarianten J einer P_n^k werden aus den Determinanten der Koordinatenmatrix gebildet; sie sind homogen und gleichen Grades in den Koordinaten jedes Punktes und bleiben bei Vertauschungen der Punkte ungeändert. Für die P_6^1 und P_6^2 werden vollständige J-Systeme angegeben. Vermöge der hiermit verknüpften algebraischen Prozesse lassen sich bereits explizite Gleichungen für die F_3 erhalten, die vermöge der *Clebsch*schen Abbildung mittels der c_3 durch die P_6 hervorgeht, sowie für ihre 27 Geraden und 45 Ebenen.[102a])

Die in gewissem Sinne geordnete P_n^k läßt sich andererseits auf einen Punkt P eines $S_{k(n-k-2)}$ abbilden; zwei solche Bildpunkte P, P' sind durch eine *Cremona*sche Transformation T verbunden. Die $n!$ Bildpunkte P, die den $n!$ Permutationen der P_n^k entsprechen, sind konjugiert unter einer *Cremona*schen Gruppe $G_{n!}$, deren Invarianten sich aus denen von P_n^k ergeben.

Von Bedeutung sind die mit der P_n^k und $G_{n!}$ verknüpften „*Formenprobleme*“[103]), bei vorgegebenen numerischen Werten gewisser Systemformen die Variabeln zu bestimmen. Zu dem Behuf wird die $G_{n!}$ zu einer $G_{n,2}$ erweitert mittels des Begriffes „*kongruenter*“ Punktreihen, die sich aus den beiden singulären Punktreihen einer *Cremona*-Transformation und evtl. noch einer gewissen Anzahl gewöhnlicher korrespondierender Punkte zusammensetzen (z. B. im Falle einer P_6^2 aus den beiden Fundamentaldreiecken einer T_2).

Die in einer Ebene mit einer P_n^2 kongruenten (und projektiv verschiedenen) Reihen lassen sich abbilden auf ein Aggregat von Punkten in einem $S_{k(n-k-2)}) = \Sigma$, das bereits durch *einen* seiner Punkte bestimmt ist; diese Punkte sind konjugiert unter der erweiterten $G_{n,2}$.

Diese $G_{n,2}$ sind nur in den drei Fällen $n = 6, 7, 8$ endlich; die beiden ersteren sind isomorph zu den Gruppen der 27 g einer F_3 resp. der 28 Doppeltangenten einer c_4.

102a) Vgl. hiermit die frühere Aufstellung bei *Coble*, John Hopk. U. C. 190 (1911), p. 59. S. auch Nr. **11**, Note 35a.

103) So führt 102) das durch die assoziierten P_5^1 und P_5^2 bestimmte Formenproblem der $G_{5!}$ zur Lösung der $f_5 = 0$, und das durch die assoziierten P_6^1 und P_6^3, sowie die sich selbst assoziierte P_6^2 bestimmte Formenproblem der $G_{6!}$ zur Lösung der $f_6 = 0$. S. weitere Literatur daselbst.

Was die erstere anlangt, so bilden die c_3 durch P_6^2 die Ebene zunächst ab auf eine F_3, die in der *Cremona*schen Hexaederform F_3' (Nr. 18) auftritt. Die rationalen Invarianten der $G_{6,2}$ sind auch solche der F_3' nach Adjunktion einer Irrationalität, die eine „Sechs" festlegt.

Solche Invarianten bestimmen die invarianten Mannigfaltigkeiten der G_{61} im $S_4 = \Sigma$, und letztere werden umgekehrt durch sie bestimmt. Geht man über zur erweiterten $G_{6,2} = G_{51840}$ (s. oben) in Σ, so gelangt man zu den Invarianten und Kovarianten der F_3' und damit auch der allgemeinen F_3. Bei vorgegebener F_3 kennt man ihre Invarianten und linearen Kovarianten; diese sind die „bekannten" Größen im Formenproblem der $G_{6,2}$.

Dessen Lösung liefert den Bildpunkt P der P_6^2 in Σ. Aus der P_6^2 lassen sich die g der F_3', sowie deren lineare Kovarianten ableiten. Vermöge einer linearen Transformation gehen dann die bekannten g der F_3' über in die gesuchten der F_3.

Alle diese Prozesse sind *rational* mit Ausnahme der Lösung des Formenproblems der $G_{6,2}$; überdies tritt eine akzessorische Irrationalität hinzu, die in der Dreiteilung der Perioden der hyperelliptischen Funktionen für $p = 2$ ihren Ursprung hat.

Umgekehrt[104]) wird gezeigt, wie sich die g einer gegebenen F_3 rational durch Terme einer Lösung des Formenproblems der $G_{6,2}$ bestimmen lassen; diese Lösung kann aber auch erhalten werden in Termen der Lösung eines mit den Θ-Funktionen verknüpften Formenproblems.

Im Unterschied von der *Klein*schen Lösung wird hier kein Gebrauch gemacht von einer f_{27} oder einer von deren Resolventen; die Untersuchung bewegt sich lediglich im Gebiet der irrationalen In- und Kovarianten der Fläche nach Adjunktion ihrer 27 g. Die $G_{6,2}$ führt hier direkt zur *Burkhardt*schen Gruppe; den Vertauschungen der g entsprechen für die Invarianten die Operationen einer Korrelationsgruppe, die sich auf der *Burkhardt*schen Kollineationsgruppe aufbaut. Die Lösung des Formenproblems der $G_{6,2}$ geschieht durch Adjunktion einer Lösung des *Burkhardt*schen, womit auch das allgemeine *Burkhardt*sche Formenproblem lösbar wird. In gleichem Sinne hat *C. C. Bramble*[104a]) die $G_{7,2}$ für die Gruppe der 28 Doppeltangenten der c_4 verwendet.

23. Spezielles. In Anmerkungen zu den bisherigen Nummern (insbes. **13** und **14**) ist bereits öfters auf gewisse spezielle F_3 hinge-

104) *Coble,* Amer. Math. Soc. Trans. 17 (1916), p. 345; 18 (1917), p. 331.
104a) *Bramble,* Amer. J. Math. 40 (1918), p. 351.

wiesen worden; solche, die sich damals füglich nicht einreihen ließen, mögen hier, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, zusammengestellt werden.

In metrischer Hinsicht werden die F_3 nach dem Verhalten zur E_∞ eingeteilt von *R. Zimmermann*[104b]); in diesem Sinne betrachtet die F_3 als „Mittelpunktsfläche" *K. Stoltz.*[104b])

F. Dumont[105]) fragt nach solchen F_3 ($= \Phi_3$), die in bezug auf eine F_2 *autopolar* sind, d. i. mit ihrer Polarfläche zusammenfallen; er gelangt zu vier Typen, unter denen sich insbesondere die R-F_3 (Nr. **14**) befinden.

Dumont[106]) findet weiter, bei dem Versuch, Sätze von *Chasles* über c_3 auf F_3 zu übertragen, drei Normaltypen von F_3, die in kanonischer Form aufgestellt werden. Endlich untersucht *Dumont*[107]) auch F_3 mit einer Symmetrieachse.

H. Glaser[108]) untersucht eingehend *autoinverse* F_3, d. s. solche, die durch Inversion in sich übergehen.

Bei einigen Autoren entstehen gewisse F_3 durch Translation von Kurven, so von C_3 bei *A. S. Gale*[109]): es ergeben sich drei Typen, worunter die *Cayley*sche R-F_3 (Nr. **14**); ferner indirekt durch Translation von r_4 bei *J. Eiesland.*[110])

Durch ähnliche C_2 werden gewisse F_3 erzeugt nach *C. von Ebbenhorst-Tenzbergen.*[111])

Umdrehungs-F_3 treten auf bei *M. J. von Uven*[112]), allgemeiner symmetrische F_3 bei *E. Ciani*[112]), von denen fünf Typen aufgestellt werden. Gewisse, aus F_2 abgeleitete symmetrische F_3 betrachtet *S. Mangeot.*[112]) Gewisse, schon bei *Möbius* vorkommende F_3, verfolgt weiter *C. E. Cullis.*[113])

104b) *Zimmermann,* Progr. Realschule Freiburg 1888, wo das Verfahren auch auf F_4, F_5, F_6 ausgedehnt wird; *Stoltz,* Diss. Gießen 1890, wo auch die projektive Verallgemeinerung berücksichtigt wird.

105) *Dumont,* Soc. math. fr. Bull. 25 (1897), p. 74. S. Nr. **14**, Note 51.

106) *Dumont,* ebenda p. 235; 26 (1898), p. 124; Nouv. Ann. (3) 17 (1898), p. 503.

107) *Dumont,* Soc. math. fr. Bull 28 (1900), p. 117.

108) *Glaser,* Progr. Falkgymn. Berlin 1902, 1903.

109) *Gale,* Amer. Math. soc. Bull. (2) 10 (1904), p. 188. S. Nr. **14**, Note 51.

110) *Eiesland,* Amer. J. 30 (1908), p. 170; 33 (1911), p. 1. Die F_3 ergeben sich aus jenen Translationsflächen durch eine logarithmische Transformation der Koordinaten.

111) *v. Ebbenhorst-Tenzbergen,* Diss. Amsterdam 1912; Nieuw Arch. (2) 10 (1912), p. 75.

112) *v. Uven,* Arch. Teyler (3) 8 (1903), p. 407; *Ciani,* Rom Linc. Rend. (4) 6_1 (1890), p. 399; *Mangeot,* Nouv. Ann. (3) 10 (1891), p. 235.

113) *Cullis,* Calcutta Math. Soc. Bull. 1 (1919), p. 9, 83.

Deutet man mit *G. Huber*[114]) in der Gleichung konfokaler Kegelschnitte den Parameter λ (oder auch eine lineare Form von λ) als dritte Raumkoordinate z, so ergibt sich eine für Übungszwecke besonders geeignete F_3 („Pons-F_3").

Auf weitere metrisch-spezielle F_3[114a]) kann nur kurz hingewiesen werden.

In der Tetraedergeometrie treten gewisse F_3[114b]) als Analoga merkwürdiger Kreise und Kegelschnitte der Dreiecksgeometrie (Art. III$_1$ 10, *G. Berkhan* und *W. Fr. Meyer*) auf.

Von differentialgeometrisch ausgezeichneten Kurven auf F_3 sind besonders die Asymptotenkurven betrachtet worden, so für F_3 mit einem gewöhnlichen d_2 bei *A. Sucharda*[115]); ferner von *B. Blutel* und *Ch. Bioche*[116]) F_3 mit C_3 und C_4 als Asymptotenkurven.

J. Drach[117]) deckt einen eigentümlichen Zusammenhang auf zwischen den Asymptotenkurven von F_3 und den Krümmungslinien der Wellenfläche (s. *„Timerding"*, p. 860 ff.). Von allgemeineren

---

114) *Huber,* Monatsh. Math. Phys. 22 (1911), p. 89.

114a) So diskutiert *E. Allardice,* Edinb. Math. Soc. Proc. 10 (1892), p. 59, die (in der Theorie der harmonischen Bewegungen auftretende) F_3:

$$xyz - (x^2 + y^2 + z^2) + 1 = 0;$$

s. auch *J. Hammond,* Edinb. Times 73 (1900), p. 74.

Den Ort der Fußpunkte der von einem Raumpunkte auf die Geraden einer linearen Kongruenz gefällten Lote, d. i. eine F_3 mit einer g_∞, studiert *L. Borgmeyer*, Diss. Münster 1893.

114b) *A. Sartiaux,* Nouv. Ann. (2) 8 (1869), p. 313; *H. Thieme,* Ztschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 56; *G. Bauer,* München Ber. 1888, p. 737; *H. Jettmar,* Arch. Math. Phys. (3) 10 (1891), p. 398; *W. Fr. Meyer,* Intern. Kongr. Heidelberg 1904, p. 322; *S. Kniest,* Progr. Gymn. Rössel 1897; *Ch. Bioche,* Nouv. Ann. (4) 3 (1902), p. 438; *G. Fontené,* Nouv. Ann. (4) 6 (1906), p. 145; *J. Neuberg,* Arch. Math. Phys. (3) 16 (1910), p. 11; 17 (1911), p. 34; *W. H. Salmon,* ebenda (3) 18 (1911), p. 154; 21 (1913), p. 300; 23 (1914), p. 14.

115) *Sucharda,* Böhm. Akad. 5 (1896), Nr. 9; Monatsh. Math. Phys. 8 (1897). p. 297. Die Gleichung einer solchen F_3, mit d_2 in O, läßt sich in der kanonischen Gestalt annehmen: $C_2 + C_3 = 0$, wo C_3 in drei lineare Faktoren zerfällt. Man hat vier Realitätstypen von F_3 zu unterscheiden, je nachdem 6, 4, 2, 0 reelle g durch den d_2 gehen. Bei dem letzten Typus läßt sich die Integration der Differentialgleichungen der Asymptotenkurven ausführen; bei den ersteren drei Typen muß man sich mit Annäherungen begnügen. Es werden jeweils möglichst genaue Konstruktionen der Kurven ausgeführt. [S. die Vorarbeiten von *W. Dyck* über gestaltliche Verhältnisse von Haupttangentenkurven, München Ber. 23 (1891), p. 23; Deutsche Math.-Ver. 1 (1892), p. 60.]

116) *Blutel,* Paris C. R. 117 (1894), p. 722; *Bioche,* Soc. math. fr. Bull. 27 (1899), p. 96; ebenda 35 (1907), p. 70.

117) *Drach,* Paris C. R. 152 (1911), p. 1458.

Gesichtspunkten aus untersucht die Haupttangentenkurven der F_3 *X. Stouff.*[118])

Die spezielle F_3: $xyz = a$ ist sowohl hinsichtlich ihres Orthogonalsystems von *H. Stahl*[119]), wie ihrer Krümmungslinien von *F. Schiffer*[119a]) untersucht worden.

Ferner sei auf die F_3 hingewiesen, die nach *R. v. Lilienthal*[120]) als Ort der Brennpunkte eines gewissen Strahlensystems auftritt.

Sodann sei auch noch auf die Behandlung der Asymptotenpunkte von F_3 bei *D. J. Korteweg*[121]), sowie besonderer F_3 mit Ovalpunkten bei *H. Wieleitner*[121a]) hingewiesen.

Endlich sei noch erwähnt, daß nach *L. Seifert*[121b]) bei einer F_3 mit uniplanarem d_2 die parabolische Kurve eine C_2, und die Haupttangentenkurven R_6 sind.

24. Das Zylindroid. Unter den R-F_3 (Nr. **14**) spielt das Zylindroid („Z“) wegen seiner vielfachen Anwendungen[122]) in der Theorie der Bewegungen starrer Körper eine besondere Rolle.

Eine ergiebige Quelle für die geometrischen Eigenschaften der Fläche liefert die Liniengeometrie (s. den Art. III C 8, *K. Zindler,* Algebraische Liniengeometrie, bes. Nr. **13**). Danach erscheint die Z als eine „Achsenfläche“ („A-F_3“), d. i. der Ort der Achsen der linearen Komplexe K_1 eines Büschels.

So zuerst bei *P. H. Schoute*[123]), unter Beschränkung auf zwei reelle getrennte Leitgerade l_1, l_2; die Doppelgerade d ist die Linie kürzesten Abstandes von l_1, l_2; die einfache Begleitgerade e ist die unendlichferne Achse der zu l_1, l_2 parallelen Ebenen.

---

118) *Stouff*, Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 45.

119) *Stahl,* Math. Ann. 3 (1871), p. 488. Über das Orthogonalsystem der F_3: $z = cy^2x$ s. *G. Hochheim,* Arch. Math. Phys. 35 (1873), p. 31.

119a) *Schiffer,* Progr. Realschule Wien 1900, in weiterer Ausführung von Angaben bei *G. Darboux,* Th. des surfaces I, Paris 1885, p. 496. Die zugehörige Zentrafläche diskutiert *C. Beutel,* Württ. mat. nat. Mitt. (2) 15 (1913), p. 33.

120) *v. Lilienthal*, Math. Ann. 31 (1888), p. 83.

121) *Korteweg,* Wien Ber. 98 (1889), p. 1154 [vgl. *Zeuthen,* Math. Ann. 8 (1874), p. 5].

121a) *Wieleitner,* Diss. Münster 1901.

121b) *Seifert,* Spiso Br. 1923, Nr. 23.

122) *R. S Ball* hat seine zahlreichen Untersuchungen hierüber zusammengefaßt in dem Werke: Theorie of screws, Dublin 1876; 2. ed. London 1900.

Die Fläche Z tritt aber schon viel früher auf, vgl. die bis 1902 reichende Literaturübersicht von *E. Wölffing* und *E. Lampe,* Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 228, auf die besonders verwiesen sei. Als älteste Autoren sind zu erwähnen: *Sangro,* Napoli Atti 1 (1819), p. 83, 97; *W. R. Hamilton,* Dublin Trans. 16 (1830), p. 4.

123) *Schoute,* Edinb. Times 52 (1890), p. 77.

Weitere Ergänzungen finden sich bei *A. Demoulin*[124]), der auf die Beziehungen der A-F_3 zur Z näher eingeht (s. u.), und auch den Fall nicht reeller Flächen berücksichtigt.

In drei Arbeiten[125]) allgemeinerer Tendenz von *St. Jolles, Th. Reye* und *H. Mohrmann* erscheinen beide Flächen als gewisse Spezialgebilde eingelagert.

Neuerdings hat *W. Fr. Meyer*[126]) beide Flächen und ihren Zusammenhang systematisch mittels liniengeometrischer Rechnung untersucht.

Für die beiden Grundkomplexe des Büschels werden kanonische Formen aufgestellt, aus denen sich die Eigenschaften der A-F_3 ablesen lassen. Dabei sind auch die Fälle von zwei komplexen sowie koinzidierenden Leitgeraden l_1, l_2 zulässig.

Zu vorgegebener A-F_3 gehören noch ∞^1 erzeugende K_1-Büschel.

Die A-F_3 erscheint als eine solche („konoide") R-F_3, deren Erzeugende zu d orthogonal sind, und die zwei reelle (getrennte) Koinzidenzerzeugende besitzt. Auf Grund der Tatsache, daß die A-F_3 und die Z ein einziges (sc. reelles) Paar von zugleich inzidenten und orthogonalen Erzeugenden besitzen, folgt die *völlige Identität* beider Flächen.

Aus den expliziten und impliziten Darstellungen der Z ergeben sich ohne weiteres die bekannteren Eigenschaften der Fläche.

So schneiden die Ebenen durch die Erzeugenden Ellipsen[127]) aus, deren Projektionen auf eine zu d senkrechte Ebene Kreise[127]) sind.

Der Ort der Fußpunkte der von einem beliebigen Raumpunkte P auf die Erzeugenden gefällten Lote ist eine jener Ellipsen.[128]) Um-

---

124) *Demoulin,* Bull. Soc. math. Fr. 20 (1892), p. 43; 29 (1901), p. 39.

125) *Jolles,* Math. Ann. 63 (1907), p. 337 (Fokaltheorie der linearen Kongruenzen); *Reye,* Math. Ann. 69 (1910), p. 550 (Kongruenz der Achsen eines Bündels von K_1); *H. Mohrmann,* Math. Ann. 73 (1913), p. 571 [Haupttangentenkurven auf Netzflächen; vgl. *A. Voss,* Math. Ann. 8 (1874), p. 54].

126) *Fr. Meyer,* J. f. Math. 159 (1028), p. 50. Dabei empfiehlt es sich, die Linienkoordinaten einer Raumgeraden nicht, wie üblich, durch zwei Indizes anzugeben, sondern, mit Rücksicht auf die Auszeichnung der E_∞, in zwei Tripel p_i, q_i $(i = 1, 2, 3)$ zu zerlegen.

Die binär-invariantentheoretische Grundlage der Figur wird durch ein System von fünf f_2 gebildet, die an fünf harmonische Beziehungen geknüpft sind.

127) *J. B. Göbel,* Ztschr. Math. Phys. 25 (1890), p. 281.

128) *Nash* und *Morel,* Edinb. Times 30 (1878), p. 96; *R. S. Ball,* ebenda 65 (1895), p. 28; 67 (1897), p. 60.

Umgekehrt ist die Z (abgesehen vom Zylinder) das einzige (reelle) Konoid mit stets ebenen Fußpunktkurven, nach *P. Appell,* Rev. math. sp. 5 (1895), p. 129. Dies gilt nach *Appell,* Bull. Soc. math. Fr. 28 (1900), p. 251, 367, auch allgemein

gekehrt gehören zu irgendeiner solchen Ellipse noch ∞^1 Punkte P, die eine Parallele zu d erfüllen.

Gewisse Verallgemeinerungen der Z treten bei *E. Müller*[129]) und *V. Simandl*[130]) auf.

Differentialgeometrisch ist bemerkenswert, daß nach *Ch. Michel*[131]) der Ort der Krümmungszentra der durch einen Punkt P einer Fläche F gehenden Ebenenschnitte eine F_4 ist (s. „*Salmon-Fiedler*", p. 442; p. LXI, Note 171), mit einer Z als Inversen bezüglich P; beide Flächen haben die Doppelgerade d gemein. Umgekehrt läßt sich zu gegebener Z eine F konstruieren, wenn man P als einen Punkt von d wählt.

Daran schließen sich Schattenkonstruktionen[131]) der Z.

Nachträge.

Nr. 3, Note 10, p. 1446. Nach *E. Eckardt,* Ztschr. Math. Phys. 19 (1874), p. 259, liegen, wie aus der Normalgleichung der $H(F_3)$ hervorgeht, die zehn c_2, in denen die Tangentialkegel der zehn d_2 die H schneiden, zu je dreien zehnmal perspektiv.

Die Scheitel der zehn so entstehenden Sehkegel liegen auf den Pentaederkanten und werden aus diesen durch eine Ebene $-\sum az = 0$ — ausgeschnitten.

Nr. 8, Note 22, p. 1454. Die *Steiner*sche Erzeugung (II) der F_3 durch projektive Zuordnung eines Ebenen- und eines F_2-Büschels führt weiter aus *E. Eckardt,* Ztschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 163.

---

für R-F; vgl. dazu noch *R. Bricard,* ebenda 29 (1901), p. 18, der auch sphärische Fußpunktkurven in Betracht zieht.

Andererseits existieren für jede R-F Punkte (die evtl. auch eine ganze Gerade erfüllen), deren Fußpunktkurve in bezug auf die Erzeugenden eine ebene ist, nach *E. Korawal,* Bull. math. astr. (2) 33 (1909), p. 138.

129) *Müller,* Wien Ber. 126 (1917), p. 915. Hier werden Punkttransformationen des S_5 untersucht, die die Ebenen in eine Schar kongruenter Konoide überführen; als Sonderfall tritt eine Schar von Z auf.

130) *Simandl,* Bull. math. int. 19 (1914), p. 46; 20 (1914), p. 236, 351. Eine gewisse R-F_4 erscheint als Verallgemeinerung der Z.

131) *Michel,* Ass. Fr. 22 (1893), p. 184; vgl. die Ergänzungen von *A. Mannheim,* ebenda 23 (1894), p. 201, und *E. Janisch,* Monatsh. Math. Phys. 8 (1897), p. 178. Hieraus entwickelt *Michel,* Bull. Soc. math. Fr. 24 (1896), p. 26; Ass. Fr. 31 (1903), p. 171, Schattenkonstruktionen der Z, indem der Leuchtpunkt entweder auf der Normalen von F in P, oder aber auf der Tangentialebene in P gewählt wird. Solche Konstruktionen bei Parallelbeleuchtung führen aus *A. Adler,* Wien Ber. 113 (1904), p. 431, und *E. Janisch,* Arch. Math. Phys. (3) 12 (1907), p. 317.

Nr. **11**, Note 35d, p. 1466. Im besonderen sind bemerkenswert die entsprechenden Gruppierungen in der Restkonfiguration von 16 g, die nach Ausschluß einer der 27 g, nebst den sie treffenden 10 g verbleiben. Es sind die nämlichen Gruppierungen, die zwischen den 16 g einer F_4 mit $\overline{C}_2$ bestehen, s. *J. Pereno*, Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 57; *„Timerding"*, p. 864 ff., und Nr. **16**.

Nimmt man etwa a_p als die ausgeschlossene Urgerade, so sind die 16 g repräsentiert durch: a_i, a_k, a_l, a_m, a_n, b_p, c_{ik}, c_{il}, c_{im}, c_{in}, c_{kl}, c_{km}, c_{kn}, c_{lm}, c_{ln}, c_{mn}.

Man hat zunächst 80 „Zweien" (Paare windschiefer g), andererseits 40 Inzidenzpaare. Sodann 130 „Dreien" (Tripel windschiefer g).

Die „Vieren" (Quadrupel windschiefer g) zerlegen sich in zwei Arten, zweiter resp. erster Art, je nachdem sie sich mittels einer fünften, zu allen vier windschiefen g zu einer „Fünf" ergänzen lassen oder nicht.

Jede Vier der ersten Art, etwa $(a_i, c_{kl}, c_{km}, c_{kn})$, läßt sich durch eine bestimmte zweite $(a_k, c_{il}, c_{im}, c_{in})$ derselben Art zu einer „Doppelvier" vervollständigen; jede Gerade der einen Vier trifft drei der anderen Vier, während sie zur vierten windschief ist.

Solcher Vieren erster Art gibt es 40, mithin 20 Doppelvieren. Die jeweils verbleibenden 8 g bilden wiederum, und zwar auf nur eine Art, eine Doppelvier erster Art; mithin gibt es 10 Paare von Doppelvieren erster Art, an denen je alle 16 g partizipieren.

Jede vorgegebene „Zwei" kommt in vier (nicht drei, wie *„Timerding"* versehentlich angibt) solchen Doppelvieren vor.

Auch die Vieren zweiter Art setzen sich zu Doppelvieren zusammen, z. B. (a_i, a_k, a_l, a_m), $(c_{in}, c_{kn}, c_{ln}, c_{mn})$. Hier ist gerade umgekehrt je eine Gerade der einen Vier windschief zu dreien der anderen Vier, während sie die vierte trifft (bei *„Timerding"* versehentlich vertauscht).

Solcher Doppelvieren zweiter Art gibt es 40. Sie sind (1, 1)-deutig den 40 Inzidenzpaaren zugeordnet; die Geraden je einer der beiden Vieren treffen die eine Gerade des Inzidenzpaares, die andere nicht, und vice versa. Die verbleibenden 8 g bilden noch 8 Doppelvieren zweiter Art. Jede gegebene „Zwei" tritt in 12 Doppelvieren auf.

Von den beiden Transversalen irgendeiner Vier gehört stets die eine der F_4 an, die andere nicht.

Endlich hat man 16 „Fünfen" windschiefer g. Diese sind alle „eigentliche" (Nrn. **10**, **11**), insofern sie zwei Transversalen zulassen; auch hier gehört stets die eine der F_4 an, die andere nicht. Diese 16 Fünfen sind (1, 1)-deutig den 16 g zugeordnet, eben vermöge der sie jeweils treffenden Transversale auf der F_4, und umgekehrt wird jede der 16 g von fünf Geraden, einer Fünf, getroffen.

Nr. **11**, Note 38a, p. 1475. Eine (1, 1)-deutige Korrespondenz zwischen den Geraden des Raumes und den Schließungskegelschnitten eines festen Kegelschnitts tritt schon bei *F. Aschieri* auf, Lomb. Ist. Rend. (2) 12 (1879), p. 265, 341, der den Grundgedanken *Cremona* zuschreibt.

Nr. **13**, Note 46, p. 1483. Die Krümmungslinien auf S, wie auf F_3 mit 4 d_2, untersucht, in Spezialisierung einer allgemeineren Methode, *G. Darboux*, Paris C. R. 84 (1877), p. 382.

Nr. **14**, Note 51, p. 1490. Die Polarflächen der R-F_3 untersucht eingehend *A. Hochheim,* Ztschr. Math. Phys. 23 (1878), p. 308, 345; 24 (1879), p. 18.

Nr. **16**, Note 65, p. 1501. Indem *H. G. Zeuthen,* Festschr. Kjöb. 1879, nach der *Geiser*schen Methode an eine F_4 mit $\overline{C}_2$ von irgendeinem Punkte der $\overline{C}_2$ die Tangenten an die F_4 legt, ergibt sich als Umrißspur wiederum eine allgemeine c_4 $(p = 3)$.

Daraufhin werden die Gestalten der F_4, unter Berücksichtigung der Realität, der Zusammenhang u. a. diskutiert.

Nr. **17**, Note 69, p. 1504. Von weiteren Modellen seien noch erwähnt: ein solches der F_3 mit 27 reellen g, von *J. Caron,* Bull. Soc. Math. Fr. 8 (1880), p. 73; solche einer F_3 mit 4 d_2 (mit Haupttangentenkurven), von *S. Bacharach,* Münchener Modelle 1877 (Darmstadt); endlich solche von R-F_3, von *F. Berka,* Berlin 1879.

Nr. **23**. Von besondern F_3 seien noch die erwähnt, wo drei in einer Ebene T liegende g in einem Punkte inzidieren, bei *E. Eckardt,* Math. Ann. 10 (1875), p. 227. Unter den besonderen R-F_3 ist beachtenswert eine gewisse Schraubenfläche, bei *Cayley,* Men. (2) 1 (1871), p. 71.

(Abgeschlossen im September 1928.)

Erschienene Bände bzw. Hefte:

Band I. Arithmetik und Algebra, in 2 Teilen. Vollständig erschienen.
- II. Analysis, in 3 Teilen. Teil I in zwei Hälften, Teil II, Teil III in zwei Hälften vollständig erschienen.
- III. Geometrie, in 3 Teilen. Teil I, 1. Hälfte vollständig erschienen, 2. Hälfte in 6 Heften, davon 5 erschienen. Teil II, 1. Hälfte vollständig erschienen, 2. Hälfte in 6 Heften, davon 4 erschienen. Teil III vollständig erschienen.
- IV. Mechanik, in 4 Teilbänden und 1 Registerband. Teilband I, III und IV vollständig erschienen. II. Teilband in 4 Heften, davon 3 erschienen. Registerband in 1 Heft (in Vorbereitung).
- V. Physik, in 3 Teilen. Vollständig erschienen.
- VI, 1. Geodäsie und Geophysik, in 1 Teilband. I. und II. Hälfte vollständig erschienen.
- VI, 2. Astronomie, 1. Hälfte vollständig erschienen, 2. Hälfte in 3 Heften, davon 2 erschienen.

Unter der Presse:

Band III. Teil 1. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. Von H. Tietze in München und L. Vietoris in Innsbruck.

Band III: Geometrie, in 3 Teilen.
Redigiert von W. Fr. Meyer in Königsberg und H. Mohrmann in Darmstadt.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

*Vorwort zu Band III von **W. Fr. Meyer** in Königsberg.

A. Rein geometrische Theorien.
B. Grundlagen der Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie.

1. Hälfte.

*Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 1, 1. Hälfte.

*1. Prinzipien der Geometrie: **F. Enriques** in Bologna.
*2. Die Begriffe „Linie" und „Fläche": **H. v. Mangoldt** (†).
*3. Analysis situs: **M. Dehn** in Frankfurt a. M. und **P. Heegaard** in Oslo.
*4a. Beziehung und Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert: **G. Fano** in Turin.
*4b. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip: **G. Fano** in Turin.
*5. Projektive Geometrie: **A. Schoenflies** (†).
*5a. Konfigurationen der projektiven Geometrie: **E. Steinitz** in Kiel.
*6. Darstellende Geometrie: **E. Papperitz** i. Freiberg i. S.
*7. Die verschiedenen Koordinatensysteme: **E. Müller** (†).

2. Hälfte.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 1, 2. Hälfte

*8. Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus: **J. Sommer** in Danzig.
*9. Elementargeometrie u. elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung: **M. Zacharias** in Berlin.
*10. Neuere Dreiecksgeometrie: **G. Berkhan** (†) und **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. Pr.
*11a. Systeme geometrischer Analyse I: ***H. Rothe** (†)
b. Systeme geometr. Analyse II: ***A. Lotze** in Stuttgart.
*12. Polyeder u. Raumeinteilungen: **E. Steinitz** in Kiel.
13. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie: **H. Tietze** in München und **L. Vietoris** in Innsbruck.

Register zu Band III, A B.

II. Teil.

C. Algebraische Geometrie.

1. Hälfte.

*Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 2, 1. Hälfte.

*1. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme: **F. Dingeldey** in Darmstadt.
*2. Flächen II. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven: **O. Staude** (†).
*3. Abzählende Methoden: **H. G. Zeuthen** (†).
*4. Allgemeine Theorie d. höheren ebenen algebraischen Kurven: **L. Berzolari** in Pavia.
*5a. u. *5b. Spezielle ebene algebr. Kurven: ***G. Kohn** (†) und ***G. Loria** in Genua.
*6a. Grundeigenschaften der algebraischen Flächen: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Rom.
*6b. Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus: **G. Castelnuovo** in Rom und **F. Enriques** in Rom.

2. Hälfte.

Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 2, 2. Hälfte.

*7. Mehrdimensionale Räume: **C. Segre** in Turin.
*8. Algebr. Liniengeometrie: **K. Zindler** in Innsbruck.
*9. Algebraische Raumkurven u. abwickelbare Flächen: **K. Rohn** (†) und **L. Berzolari** in Pavia.
*10a. Spezielle algebraische Flächen: Flächen dritter Ordnung. **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. Pr.
*10b. Spezielle algebraische Flächen: Flächen vierter und höherer Ordnung. **W. Fr. Meyer** in Königsberg i. Pr.
11. Algebraische Transformationen u. Korrespondenzen: **L. Berzolari** in Pavia.

Register zu Band III, C.

III. Teil.

*Inhaltsverzeichnis von Band III, Teil 3.

D. Differentialgeometrie.

*1. 2. Anwendung d. Differential- u. Integralrechnung auf Kurven, Flächen u. d. Raum: **H. v. Mangoldt** (†).
*3. Kurven a. d. Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster i. W.
*4. Besondere transcendente Kurven: **G. Scheffers** in Charlottenburg.
*5. Besondere transcendente Flächen: **R. v. Lilienthal** in Münster i. W.
*6. Abwickelung und Abbildung zweier Flächen aufeinander: **A. Voss** in München.
*7. Berührungstransformat.: **H. Liebmann** in Heidelberg.
*8. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen: **H. Liebmann** in Heidelberg.
*9. Dreif. orthogon. Systeme: **E. Salkowski** in Charlottenburg.
*10. Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten: **R. Weitzenböck** in Amsterdam.
*11. Differentialinvarianten in d. Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen: **L. Berwald** in Prag.

*Register zu Band III, D.

Bisher erschien:

Teil I	Heft 1	(A, B 1—3).	[220 S.]	1907.	*RM* 8.—	Teil II	Heft 5	(C 5b).	[64 S.]	1915.	*RM* 2.40
— I	— 2	(A, B 4a u. 4b).	[168 S.]	1907.	*RM* 6.40	— II	— 6	(C 6a u. b).	[133 S.]	1915.	*RM* 5.—
— I	— 3	(A, B 5).	[92 S.]	1909.	*RM* 2.60	— II	— 7	(C 7).	[204 S.]	1918.	*RM* 7.60
— I	— 4	(A, B 5a, 6, 7).	[290 S.]	1910.	*RM* 11.—	— II	— 8	(C 8).	[256 S.]	1922.	*RM* 11.—
— I	— 5	(A, B 8, 9 I).	[191 S.]	1914.	*RM* 7.20	— II	— 9	(C 9).	[208 S.]	1927.	*RM* 7.80
— I	— 6	(A, B 9 II).	[210 S.]	1919.	*RM* 8.—	— II	— 10	(C 10).	[93 S.]	1928.	
— I	— 7	(A, B 10, 11 I).	[252 S.]	1921.	*RM* 9.40	— III	— 1	(D 1—3).	[183 S.]	1903.	*RM* 8.60
— I	— 8	(A, B 11).	[172 S.]	1924.	*RM* 6.40	— III	— 2/3	(D 4—6a).	[254 S.]	1903.	*RM* 9.60
— I	— 9	(A, B 12).	[139 S.]	1922.	*RM* 5.—	— III	— 4	(D 7—8).	[98 S.]	1915.	*RM* 3.80
— II	— 1	(C 1).	[160 S.]	1908.	*RM* 6.—	— III	— 5	(D 9).	[66 S.]	1920.	*RM* 2.40
— II	— 2	(C 2).	[96 S.]	1904.	*RM* 3.60	— III	— 6	(D 10).	[73 S.]	1922.	*RM* 4.60
— II	— 3	(C 3, 4).	[199 S.]	1906.	*RM* 7.40	— III	— 7	(D 11).	[134 S.]	1927.	*RM* 5.60
— II	— 4	(C 5a)	[114 S.]	1909.	*RM* 4.40						

UNIVERSITY OF MAINE
3 7550 01697221 9

Pascals Repertorium der höheren Mathematik

2., völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe

Unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausgegeben von Prof. Dr. E. Salkowski und Prof. Dr. H. E. Timerding

I. Band: Analysis. Abschließend liegt vor:

3. Teilband: Reelle Funktionen, Neuere Entwicklungen, Zahlentheorie. Geb. ℛℳ 22.–

Der Schlußteilband des ersten Bandes bringt die reellen Funktionen, die neueren Entwicklungen zur Theorie der Differentialgleichungen, die Differenzen- und Integralgleichungen, die trigonometrischen Reihen, Kugel- und Besselsche Funktionen und Zahlentheorie. Wie das ganze Werk, so will auch der vorliegende Teilband nicht nur zur Führung und Orientierung während des mathematischen Studienganges dienen, sondern auch dem Forscher eine wertvolle Hilfe bei seiner Arbeit gewähren.

Ferner liegen vor: I. Band: Analysis. 1. Teilband: Algebra, Differential- und Integralrechnung. Geb. ℛℳ 18.–. 2. Teilband: Differentialgleichungen, Funktionentheorie. Mit 26 Fig. im Text. Geb. ℛℳ 18.–
II. Band: Geometrie. 1. Teilband: Grundlagen und ebene Geometrie. Mit 54 Fig. Geb. ℛℳ 18.–
2. Teilband: Raumgeometrie. Mit 12 Fig. im Text. Geh. ℛℳ 17.–, geb. ℛℳ 20.–

Lehrbuch der Funktionentheorie

Von Prof. Dr. W. F. Osgood

I. Band. 5. Aufl. Mit 174 Fig. Geh. ℛℳ 42.–, geb. ℛℳ 44.–

II. Band. 1. Lieferung. 2. Aufl. Mit 9 Fig. Geh. ℛℳ 16.–, geb. ℛℳ 18.–

2. Lieferung. [In Vorb. 1929.] (Teubners Lehrb. d. math. Wiss. Bd. XX, 1, 2 u. 3)

Das Buch gibt eine systematische Entwicklung der komplexen Funktionentheorie auf Grundlage der Infinitesimalrechnung und in engster Fühlung mit der Geometrie und der mathematischen Physik. Im ersten Bande wird unter Zugrundelegung von Sätzen über reelle Funktionen und Mengenlehre die Cauchysche Theorie entwickelt. Es folgen die Riemannschen Flächen nebst der konformen Abbildung und die Theorie der analytischen Funktionen sowie deren Anwendung auf periodische Funktionen, Reihen- und Produktenentwicklungen. Den Schluß bildet eine Behandlung des logarithmischen Potentials und der Uniformisierung algebraischer und allgemeiner analytischer Funktionen.

Die erste Lieferung des zweiten Bandes bringt zunächst eine die seit der Wende des Jahrhunderts erzielten bedeutsamen Fortschritte ordnende und zusammenfassende Darstellung der Theorie. Darauf werden die periodischen Funktionen mehrerer Argumente behandelt und nach einer Einleitung in die Theorie der algebraischen Funktionen nebst den damit verwandten transzendenten Funktionen gipfelt die ganze Entwicklung in einem Beweise des Riemann-Weierstraßschen Thetatheorems.

Vorlesungen über Algebra

Unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von †Dr. G. Bauer

In 4., vermehrter Auflage dargestellt von Prof. Dr. L. Bieberbach

Mit 16 Fig. im Text und auf 1 Tafel. Geb. ℛℳ 20.–

Das Buch hält auch in der vierten Auflage an dem Ziel der früheren fest, eine Einführung in die Algebra zu liefern, und will daher die Algebra nicht in einer splendid isolation von den übrigen Gebieten der Mathematik, sondern gerade in Fühlung mit denselben aufbauen. Im Mittelpunkt steht wieder die Theorie der algebraischen Gleichungen. Der Bearbeiter der vierten Auflage hat sein Bestreben dahin gerichtet, nach Stoff und Form der Darstellung dem heutigen Stand der Wissenschaft gerecht zu werden. Neu hinzugefügte Abschnitte betreffen u. a. die graphische Auflösung von Gleichungen, die mannigfachen Sätze über die Lage der Gleichungswurzeln und die Galoissche Gleichungstheorie.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

S0-GBG-979